Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Žákovská řešení slovních úloh vedoucích na kvadratickou rovnici

Students' solutions of word problems leading to quadratic equation

Petr Hanzal

Vedoucí práce:	Mgr. Derek Pilous, Ph.D.
Studijní program:	Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy - matematika

2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Žákovská řešení slovních úloh vedoucích na kvadratickou rovnici vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne...........................

podpis

Rád bych poděkoval Mgr. Dereku Pilousovi, Ph.D. za cenné rady a metodické vedení, za ochotu a trpělivost, které mi poskytl při zpracovávání mé diplomové práce. Rád bych poděkoval také prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc. za pomoc, kterou mi při zpracovávání poskytla. Také děkuji Ivaně Lukášové za překlady z francouzštiny a rodině za jejich podporu a trpělivost.

ABSTRAKT

Cílem práce je zjistit, jak žáci řeší slovní úlohy vedoucí na kvadratické rovnice. Analyzovat, kde a proč v řešení dělají chyby a které části řešení jim naopak nečiní obtíže. V teoretické části práce se nachází analýza přístupu používaných středoškolských učebnic k tomuto tématu. Další kapitoly jsou věnovány metodologii výzkumu a samotnému výzkumu, který probíhal na dvou středních školách (gymnáziu a obchodní akademii) a to ve formě rozhovorů natáčených na videokameru. Cílovou skupinou výzkumu byli žáci prvního až čtvrtého ročníku střední školy (resp. kvinty až oktávy osmiletého gymnázia). U každého žáka je uveden popis a analýza jeho řešení. Dále je uvedeno srovnání mezi žáky jednotlivých škol a mezi oběma školami a na závěr popis řešení slovních úloh vedoucích na kvadratickou rovnici a především problémů, které s ním daná cílová skupina měla.

KLÍČOVÁ SLOVA

Slovní úloha, kvadratická rovnice, žákovská řešení, kvalitativní výzkum, Newmanové metoda

ABSTRACT

The aim of the thesis is to find out students' reasoning of chosen word problem by using quadratic equation. The work focuses on specific errors end problems reported by students and evaluated by Newman´s method of Error Causes for Written Mathematical Tasks. The theoretical work was based on analyse of current mathematical textbooks and comparison with several international pedagogical studies and thesis with similar specialization. Furthermore, a detailed description of methodology and my own research are described in practical part of the thesis. Principle of study was to chose group of the students from two different high schools (one well know grammar school and one business high school in Prague) and record the process of reasoning the word problem by camera. The concluison is dedicated to proper analyses of mistakes and problems during the student´s reasonings.

KEY WORDS

Word problém, quadratic equation, student´s reasonings, quality research, Newman´s analysis

Obsah

1 Úvod

Nyní již čtvrtý rok pracuji na soukromé střední škole jako učitel matematiky a téma slovních úloh, speciálně těch vedoucích na kvadratickou rovnici, mne fascinuje již delší dobu. Ke zkoumání žákovských řešení jsem dospěl především proto, že v běžných testech se někteří žáci tématu zcela vyhnuli nebo ani nepokusili dané slovní úlohy řešit. Rozhodl jsem se proto hlouběji zkoumat žákovská řešení těchto úloh.

Za hlavní cíl jsem si tedy určil zjistit problémy a chyby v žákovských řešeních úloh řešených kvadratickou rovnicí. Zvolil jsem raději metodu kvantitativního výzkumu daného tématu např. pomocí testu, zvolil jsem však metodu rozhovoru s natáčením na videokameru a to především, abych měl možnost sledovat, nejen kde mají žáci obtíže, ale také proč. Díky tomu jsem měl možnost nejen sledovat žáka při řešení, ale také slyšet sebe a reakce žáka na mé otázky. Dalším cílem tedy bylo zdokonalit se při vedení rozhovoru nad úlohou se žákem a to tak, aby byl takový rozhovor pro žáka a jeho pochopení, co nejpřínosnější. Cílem bylo také zmapovat, jak je tato oblast popsána v používaných učebnicích a jaké výzkumy s jakými výsledky na toto téma již proběhly u nás nebo v zahraničí.

Práce je rozdělena na pět hlavních kapitol. Kromě Úvodu a Závěru obsahuje teoretickou část, v jejíž první polovině se věnuji analýze obvykle používaných středoškolských učebnic matematiky z hlediska jejich přístupu ke slovním úlohám řešeným kvadratickou rovnicí. Druhá polovina teoretické části je rešerší rozboru výzkumů a studií blízkých předmětu zkoumání této práce. Tyto výzkumy popisuji a na závěr hodnotím, co z nich vyplývá.

V další kapitole popisuji metodologii výzkumu. V této kapitole jsou shrnuty konkrétní cíle práce, hypotézy, jakým způsobem a kde jsem prováděl výzkum, popis metody vyhodnocování jednotlivých nahrávek a také vznik úlohy, kterou jsem při výzkumu použil.

Čtvrtá kapitola je pak věnována výzkumu a to nejprve pilotní studii, jíž jsem zjišťoval, zda navržené postupy a metodu vyhodnocování bude možné využít tak, jak jsem naplánoval, a poté vlastnímu výzkumu. U obou studií je uveden popis jednotlivých videonahrávek a jejich analýza zvolenou metodou. V závěru kapitoly se nachází diskuze, která obsahuje rozbor platnosti zvolených hypotéz, závěry učiněné z výzkumu a návrhy pro další výzkum v této oblasti.

2 Teoretická část

Kapitola je věnována analýze dostupných materiálů k uvedení do problematiky slovních úloh vedoucích na kvadratickou rovnici, zjištění současného stavu poznání žákovských řešení těchto úloh a také rozboru metodiky pro výzkum.

2.1 Analýza učebnic

Tato část práce se věnuje analyzování míst, kde se žáci dnes v různých učebnicích setkávají se řešením slovních úloh vedoucích na kvadratickou rovnici. K takovým slovním úlohám se dostávají jen některé střední školy, kvadratické rovnice ale patří k jednomu ze základních kamenů středoškolského vzdělání v České republice a jejich řešení se učí na všech středních školách. Bez přímého zkoumání výuky se jeví jako nejvhodnější možnost zkoumání právě učebnic, které učitelé a žáci ve školách nejčastěji používají.

Analýza učebnic je rozdělena na tři části. V první se věnuji tištěným učebnicím, které dnes zřejmě při výuce převažují. Ve druhé se budu věnovat jedné online učebnici a třetí část poskytuje shrnutí zjištěných poznatků.

2.1.1 Tištěné učebnice

Z tištěných učebnic jsem vybral nejpoužívanější na různých typech středních škol. Jedná se o tři učebnice z nakladatelství Prometheus, konkrétně (Charvát, 2008), (Calda, 1996) a (Calda, 2003) a jednu vydanou od SPN a to (Odvárko, 2006).

2.1.1.1 Charvát a kol.: Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice

Dle mých rozhovorů s učiteli i vlastní zkušenosti se jedná zřejmě o nejpoužívanější učebnici užívanou na gymnáziích. Velmi podrobně je zpracované vysvětlení řešení rovnic všech typů. Při řešení slovních úloh se ale učebnice omezuje maximálně na ukázku vzorového řešení. Ani u rovnic lineárních neposkytuje návod, jak řešit slovní úlohy řešené lineární rovnicí. Konkrétně u lineárních rovnic se objevují pouze neřešené slovní úlohy.

V kapitole věnované kvadratickým rovnicím je pro žáky připraveno alespoň vzorové řešení jedné slovní úlohy vedoucích na kvadratickou rovnici:

Příklad 3

Obsah obdélníku je 420 m^2, obvod 94 m. Určete délky jeho stran.

Řešení

Nechť délka jedné strany obdélníku je x metrů. Obvod obdélníku je 94 m, proto délka jeho druhé strany je $(47 - x)$ metrů; obsah obdélníku je pak $x(47 - x)$ m^2. Pro neznámou tedy dostáváme rovnici $x(47 - x) = 420$, po úpravě $x^2 - 47x + 420 = \mathbf{0.}$

$$\boldsymbol{D = (-47)^2 - 4 \cdot 420 = 529}$$
$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{47 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{47 \pm 23}{2} = \begin{cases} 35 \\ 12 \end{cases}}$$

Délka obdélníku je 35 m, jeho šířka je 12 m. (Charvát, 2008)

2.1.1.2 Calda, Emil: Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU 1. díl

V této učebnici je po látce věnované řešení kvadratických rovnic samostatná kapitola věnovaná slovním úlohám vedoucím na kvadratickou rovnici. Stejně jako v předchozí učebnici, jsou k dispozici místo návodu na řešení slovních úloh pouze řešené úlohy. Těch je celkem pět a zaměřují se na různé oblasti matematiky. První je tzv. slovní úlohou o pohybu, tři jsou z geometrie, a jedna nespadající do žádné z běžně užívaných kategorií.

Oproti předchozí publikaci je ale hned v úvodu kapitoly zmíněno, že se v úlohách kromě řešení kvadratických rovnic objeví i řešení slovních úloh, jehož některé zásady se probírají v kapitole věnované lineárním rovnicím. V ní se ale zásady nebo návod řešení slovních úloh nevyskytuje. Pouze řešené příklady a v jednom z nich je uvedeno, že je potřeba zjistit, zda vypočtený údaj souhlasí s podmínkami slovní úlohy. Pravděpodobně se jedná o všechny zásady v učebnici zmíněné.

Zde je uvedena ukázka zadání jedné úlohy:

Příklad 9

Z Prahy do Poděbrad vyjeli dva cyklisté. Určete průměrnou rychlost každého z nich, víte-li, že ujeli 56 km a že pomalejší ztrácel na rychlejším každou hodinu dva kilometry, takže přijel do Poděbrad o 30 minut později. (Calda, 1996)

2.1.1.3 Calda, Emil: Matematika pro dvouleté a tříleté učební obory středních a odborných učilišť, 2. díl

Na začátku učebnice je celá kapitola věnovaná slovním úlohám řešeným kvadratickou rovnicí označena jako učivo pouze pro tříleté obory, nikoliv pro dvouleté. K nalezení jsou opět pouze řešené příklady. Konkrétně jich je 5, tedy stejně jako v předchozí učebnici. Zaujala mne skutečnost, že se vyskytuje jiný typ slovních úloh než v předchozí učebnici. Společným typem je slovní úloha o pohybu a jedna geometrická úloha. Dále jsou zde uvedeny úlohy s procenty a o společné práci, které se v předchozí publikaci jako řešené nevyskytovaly.

Návod jak řešit slovní úlohy obecně se nevyskytuje ani v 1. dílu učebnice, kde je v kolonce „zapamatujte“ uvedeno pouze stejné konstatování jako v předchozí publikaci. Tedy aby si řešitel vždy zkusil výsledky zasadit do rámce slovní úlohy, jestli dávají smysl.

Ukázka zadání jedné řešené úlohy:

Příklad 15

Výletní loď urazila vzdálenost 48 km proti proudu a pak tutéž vzdálenost po proudu celkem za pět hodin. Víte-li, že rychlost proudu byla 4 km $\cdot h^{-1}$, vypočtěte, jakou rychlostí by se loď pohybovala v klidné vodě. (Calda, 2003)

2.1.1.4 Odvárko a kol.: Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť

Stejně jako ve všech předchozích učebnicích není řešení slovních úloh nějak vysvětleno, pouze ukázáno na příkladech. Zajímavé na této publikaci je, že první úloha je vlastně jen přepisem matematického zadání. Mohla by tedy pro žáky být na řešení jednodušší než jiné úlohy nezasazené do matematického rámce. Řešené úlohy se vyskytují dvě.

Ukázka zadání první úlohy:

Příklad 17

Součet druhých mocnin tří po sobě bezprostředně následujících přirozených čísel je 434. Určete tato čísla. (Odvárko, 2006)

2.1.2 Analýza online učebnice

Za široce používanou považuji u nás pouze učebnici, kterou píše a upravuje Mgr. Martin Krynický (http://www.realisticky.cz/). Přestože budu nadále používat označení učebnice, nejedná se čistě o učebnici, nýbrž o její kombinaci s metodickou příručkou. To ale považuji pro analýzu v této práci za výhodu a z jeho didaktických poznámek lze do jisté míry odvodit, jakým způsobem učitel danou látku učí. Celá učebnice je členěná dle jednotlivých vyučovacích hodin, přičemž jedna hodina je obvykle jeden -.pdf soubor. Kromě matematiky se učebnice věnuje i fyzice a oba předměty jsou rozdělené na část pro ZŠ a část pro SŠ. V době psaní této práce je kompletní pouze matematika pro SŠ.

Ve srovnání s tištěnými učebnicemi mohu ocenit autorovu snahu nechávat vždy žákům dostatek prostoru k přemýšlení a především jeho náměty, jimiž se snaží ilustrovat použití matematiky v reálném životě. Například hned v první lekci nazvané Desítková soustava nechává žáky, aby si rozmysleli, k čemu potřeboval zemědělec čísla před 5 000 lety.

První slovní úlohy se objevují od 3. kapitoly. Vzorové řešení probíhá pouze aritmeticky, nikoliv za pomoci neznámé a rovnice. I v dalších kapitolách pro 6. ročník se nevyskytuje zápis pomocí rovnic, pouze aritmetická řešení.

Slovním úlohám řešeným kvadratickou rovnicí jsou věnovány dvě kapitoly (jedna kapitola by měla odpovídat jedné vyučovací hodině). První z nich obecně těmto slovním úlohám. Tato kapitola zahrnuje 7 vyřešených úloh, mezi nimiž jsou například úlohy o společné práci, geometrické nebo i jednoduchá kombinatorická úloha. Autor se ve většině případů omezuje na to, že jsou úlohy vzorově vyřešené. Jak je ale jeho zvykem v celé učebnici, obsahuje také ke dvěma slovním úlohám pedagogické poznámky ohledně jejich řešení.

Druhá kapitola věnovaná těmto slovním úlohám má název Slovní úlohy o pohybu a hned v úvodu autor zmiňuje, že není možné ji stihnout během 45 minut. Zmiňuje také, že za cíl považuje u těchto úloh sestavení rovnice, kterou pak žáky nenechává dořešit v hodině. Jelikož je látka věnovaná fyzikálnímu vztahu času, rychlosti a dráhy, uvádí na začátku hodiny známý vzorec, který tyto veličiny spojuje.

V této kapitole se také podrobněji věnuje řešení slovních úloh obecně, respektive věnuje se řešení slovních úloh o pohybu a zobecňuje některé informace. Protože se ve srovnání s ostatními středoškolskými učebnicemi jedná o jedinou, kde autor poskytuje návod a rady k řešení slovních úloh obecně, cituji celý autorův přístup k problematice:

> Při řešení příkladů o pohybech platí vše, co jsme si říkali o řešení slovních úloh obecně, zejména:
>
> - Řešení nehledáme najednou, ale postupně.
> - Musíme znát význam každého výrazu v zadání.
> - Každá informace v zadání většinou slouží k sepsání jedné rovnice nebo jednoho vztahu mezi veličinami.
>
> Většinu příkladu je možné řešit přibližně tímto postupem (je nutné upozornit, že nejde o závazný nebo vše řešící doslovný manuál):

- Provedeme označení neznámých. Pokud má pohyb více částí (rychlejší, pomalejší …), v každé části označíme dráhu, rychlost i čas odpovídajícím indexem

- Sestavíme základní rovnici. Tento krok je nejtěžší, naštěstí základní rovnice nemusí být pouze jedna, většinou ji zle najít podle následujících znaků:

    - Jde o veličinu, jejíž hodnoty popisují základní informaci v zadání (pokud je hlavní informací příkladu, že všichni ujeli stejnou vzdálenost, měla by to být rovnice pro dráhy, pokud jde o to, že se dodržel jízdní řád, mělo by jít o rovnici pro čas…).

    - Jde o veličinu, jejíž hodnoty neznáme (abychom byli nuceni dosazovat).

    - Nejde o veličinu, jejíž hodnotu máme spočítat (při dalším postupu, budeme dosazováním druh veličiny měnit a tím řešení prodloužíme).

- Pomocí jednoho ze vztahů $s = vt;\ v = \frac{s}{t}; t = \frac{s}{v}$ přejdeme v základní rovnici k jiné veličině (a využijeme informaci ze zadání).

- Využijeme zbývající informace ze zadání, aby v rovnici zůstala jediná proměnná (pokud v rovnici před tímto bodem byly například dvě různé rychlosti, v tomto bodě musíme zajistit pomocí vztahu mezi nimi, aby zůstala jediná).

- Vzniklou rovnici (nebo jejich soustavu) řešíme. (Krynický, 2010)

2.1.3 Shrnutí

Jak z přehledu vyplývá, žádná z uvedených tištěných učebnic se tematice hluboce nevěnuje. Z mého pohledu je to překvapivé především u učebnice pro gymnázia, která dokonce nezmiňuje ani jakýkoliv odkaz na řešení slovních úloh obecně. U slovních úloh řešených kvadratickou rovnicí poskytuje pouze vzorově vyřešenou úlohu. Velmi podobně jsou na tom učebnice ostatní.

Rozdíl nalezneme v popisované online učebnici, kde se z mého pohledu autor snaží žákům situaci co nejvíce zjednodušit tak, aby byli do řešení těchto velmi obtížných úloh více motivováni. Jak jsem již zmínil v úvodu této kapitoly, nemůžeme automaticky předpokládat, že učitelé ve výuce tuto látku neprobírají podrobněji a s připomenutím základních pravidel pro řešení slovních úloh. Přesto je z mého pohledu zvláštní, že žáci mimo výuku mají malou šanci se do problematiky hlouběji dostat.

2.2 Výzkumy a studie

V českých zdrojích se mi nepodařilo dohledat žádné výzkumy či studie, týkající se slovních úloh řešených kvadratickou rovnicí, ani výzkumy na podobné téma. Pouze práce (Chromá, 2011) se tématu částečně věnuje. Zkoumaným tématem jsou slovní úlohy řešené různými typy rovnic s hypotézou, že žáci, kteří danou problematiku již probírali, tyto úlohy budou řešit lépe. Slovní úloha na kvadratickou rovnici se tedy vyskytuje jedna a to velmi jednoduchá. Autorčina hypotéza by logicky postrádala smysl, pokud by tuto slovní úlohu nebylo možné řešit jiným způsobem než vytvořením kvadratické rovnice.

Více prostoru je tedy věnováno zahraničním zdrojům, které jsou na problematiku kvadratických rovnic a slovních úloh na ně vedoucích bohatší. Vzhledem k obtížím při hledání studií či výzkumů, které by se věnovaly problematice co nejvíce podobné tématu této práce, jsem požádal o pomoc s vyhledáním Ivanu Lukášovou, která byla v době psaní této práce ve Francii. Na základě mých pokynů nalezla a následně přeložila dvě francouzské studie. Na předkladu matematických pojmů jsme pak spolupracovali, neboť neznala české ekvivalenty. Veškeré překlady francouzských zdrojů jsou tedy od ní.

Jednotlivé studie označuji názvem země, popř. číslovkou, pokud jsou z jedné země dvě a to po řadě: Francie 1 (Gallien, 2013), Francie 2 (Kol. učitelů, 2015), Malajsie a Turecko. Obecně nelze u všech hovořit o propracovaných vědeckých studiích, například závěry obou francouzských nejsou explicitně podané a čtenář si je musí udělat ze získaných poznatků sám. Chybí u nich i uvedení metodologie. Odpovídající je i rozsah těchto prací, který je opět po řadě 9, 12, 7 a 10 stran. Řazení zvolené v této práci není dle kvality vědecké stránky studií, nýbrž dle blízkosti tématu studie k tématu této práce. Za zcela korektní je možné označit studie Malajsie a Turecko, které se ale věnují jen kvadratickým rovnicím, nikoliv slovním úlohám na ně vedoucím.

Obě francouzské studie jsem zařadil i přes pochybnou vědeckou kvalitu (u Francie 2 nebyl dohledatelný autor), jelikož se k tématu samotnému opravdu blíží nejvíce. Relevance jejich závěrů (jsou-li uvedeny) je problematická. Čerpal jsem z nich především metodologickou inspiraci pro vlastní výzkum a pro výběr vhodné úlohy.

2.2.1 Francie 1

Název studie znamená v překladu: Trojčlen druhého stupně a úloha s hmotností kosmonauta[1]. Autorkou studie je Virginie Gallien. Jedná se o výzkum žákovských metod řešení úloh a následného zhodnocení jednotlivých metod řešení. Autorka výzkum realizovala na francouzském lyceu Champollion v Grenoblu, konkrétně na detašovaném pracovišti, které je součástí nemocnice. Toto zařízení je určeno studentům, kteří ze zdravotních důvodů nebo dlouhodobé hospitalizace nemohou navštěvovat běžná lycea (u nás by to byla klasická střední škola). Výzkum probíhal v prvním ročníku lycea. Účastníky bylo 5 dívek, z nichž některé ročník z blíže nespecifikovaných důvodů opakovaly. Věk účastnic byl přibližně 16 let. Dívky měly během řešení úlohy k dispozici grafickou kalkulačku a počítač.

V předchozí výuce byl vyučován význam trojčlenu a rovnice druhého stupně s diskriminantem. Po dobu zhruba 3 měsíců byl během výuky používán systém s využitím různých počítačových programů (např. GeoGebra nebo Xcas) a studenti se učili pracovat s grafickou kalkulačkou.

Cílem výzkumu bylo zjistit, jak si studenti poradí s úlohou, které sice částečně využívá dříve nabytých znalostí, ale od běžně řešených úloh se liší svojí otevřeností různým metodám a způsobům řešení. Úloha byla vybrána tak, aby bylo nutné použít mezikroků ve výpočtu, které přímo neimplikovalo zadání úlohy. Autor výzkumu dále sledoval, do jaké míry studenti samostatně využijí nabízené pomůcky (grafickou kalkulačku a počítačový program Xcas).

2.2.1.1 Úloha

Astronaut váží 60 kg na Zemi. K Zemi je přitahován silou F (N) danou výškou x od Země dle vzorce:

$$F = 60 \times 9{,}8 \times \left(\frac{6400}{6400 + x}\right)^2$$

Určete výšku x tak, aby vážil 2,5 N.

2.2.1.2 Navržené metody řešení

1. *Résoudre par le calcul* (Řešení pomocí kvadratické nerovnice.)

[1] v orig. *Problème ouvert : « Le poids de l'astronaute » Thème : Trinôme du second degré,* překl. Lukášová

2. *Vérifier certains de vos calculs à l'aide d'un logiciel de calcul formel (Xcas).* (Numerický výpočet pomocí programu Xcas.)
3. *Résoudre ce problème à l'aide d'un tableur.* (Aproximací pomocí tabulkového procesoru.)
4. *Résoudre ce problème à l'aide d'un algorithme, puis le programmer à la calculatrice.* (Řešením za pomocí algoritmu a následného využití při naprogramování programu na kalkulačce.)
5. *Résolution graphique.* (Grafické řešení za použití programu.)

2.2.1.3 Postup vyhodnocování výzkumu

Žákyně pracovaly samostatně a před koncem vyučovací hodiny měly nástin řešení. Práci poté dodělávaly samostatně později a následující hodinu matematiky probíhalo vyhodnocení. Žákyně vždy popsaly svoji metodu řešení na list papíru a prezentovaly před třídou. Následně proběhla videoprojekce správných řešení pomocí všech autorkou navrhovaných metod a na konci proběhla diskuze nad výhodami a nevýhodami jednotlivých metod a postupů.

Dvě žákyně se rozhodly použít metodu řešení kvadratické nerovnice, dvě pomocí naprogramování algoritmu a jedna použila program Xcas a následně tabulkový procesor.

2.2.1.4 Chyby při řešení

1. Při řešení kvadratické nerovnice dělaly žákyně chyby ve zkrácení zlomku: $\frac{6400}{6400+x} = \frac{6400}{6400} + x$. Problém byl také s umocňováním podílu a umocněním součtu. Další problémy se vyskytly při hledání správné nerovnice druhého stupně.
2. Při řešení pomocí naprogramování algoritmu se ukázalo jako největší problém správně vybrat cyklus vhodný pro kvadratickou nerovnici. Druhým problémem, se kterým se žákyně potýkaly při tomto řešení, bylo správné zadání pro nalezení dvojčlenu.
3. Analýza řešení pomocí programu Xcas a tabulkového procesoru ukázala záměnu tečky za desetinnou čárku v programu Xcas a obtíže s využitím tabulkového procesoru (chybná posloupnost jednotlivých kroků).

2.2.1.5 Závěry a výstup

Přes odlišnost úlohy od těch, se kterými se žákyně setkávaly ve výuce, se ukázalo, že jsou schopny s drobnou pomocí úlohu vyřešit. Největší problém pro žákyně byl s uchopením úlohy, tedy s počátkem řešení. Tomuto začátku řešení tedy předcházelo několik otázek na učitele.

Podle autorů je tedy třeba zlepšit následující žákovské dovednosti:

1. Naučit žáky lépe vyzkoušet a otestovat možnosti různých hypotéz řešení neznámých úloh na papíře, před definitivním výběrem metody řešení.
2. Více analyzovat s žáky jejich chyby při řešení.
3. Častěji zařazovat podobné typy otevřených úloh přímo do výuky a nechávat žákům volný přístup ke grafické kalkulačce a počítačovým programům.
4. Nechat žáky pracovat metodou, která jim nejvíce vyhovuje.
5. Využívat webové stránky školy k ukládání správných postupů probíraných úloh tak, aby byly dostupné pro žáky.

Jako závěr studie uvádí autorka, že se z hlediska didaktiky matematiky osvědčilo zařazení využití moderních elektronických přístrojů, které řešení úlohy učinily zajímavějším. Strategie výuky s několika řešeními propojuje znalosti žáků a učí je kriticky přemýšlet nad zvolenou metodou řešení.

2.2.2 Francie 2

Překlad originálního názvu je: „Použití funkcí“[2] Autory studie je kolektiv učitelů matematiky na akademii Aix – Marseille ve Francii a jejím cílem bylo představit studentům kvadratickou funkci a využití převedení na čtverec a samozřejmě také hodnotit žákovská řešení úlohy. Studii předcházela výuka o funkcích a trénink práce s kalkulačkou (pro získání tabulky hodnot a grafického řešení). Žáci uměli také grafické řešení rovnic a práci s algebraickými výrazy.

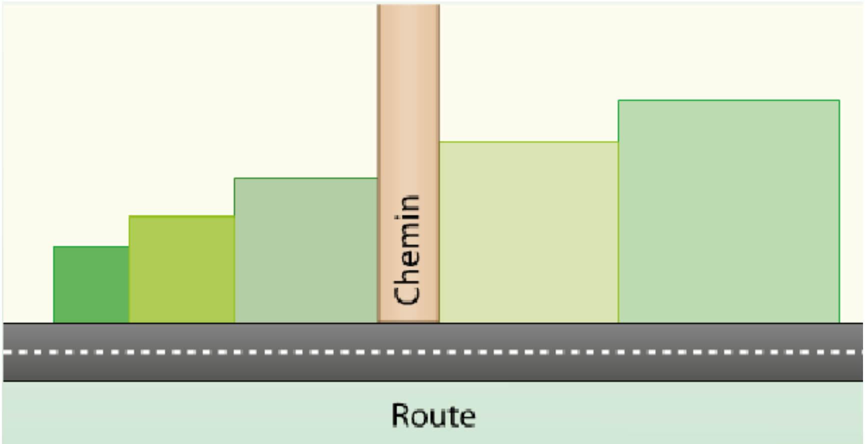
Výzkum také předpokládal již dříve zažitou schopnost řešit kvadratické rovnice, umocňovat dvojčlen druhého stupně a rozložit mnohočlen na součin pomocí algebraických vzorců.

---

[2] v orig. *Autour des fonctions...*, překl. Lukášová

2.2.2.1 Úloha

Dva bratři zdědili pět čtvercových pozemků. Délky stran těchto čtverců tvoří 5 po sobě jdoucích přirozených čísel. Pozemky jsou podél silnice, ale uprostřed je cesta. Jaké jsou rozměry každého z pozemků, pokud víme, že prostor před a za cestou je stejný (tj. součet obsahů tří menších čtverců je stejný jako součet obsahů dvou větších čtverců)?



Obr. 1

2.2.2.2 Průběh a vyhodnocování výzkumu

Žáci po celou hodinu pracují v malých skupinkách, které společně řeší zadanou úlohu. Zároveň si každý student samostatně zpracovává souhrn postupu řešení. Na konci hodiny si učitel náhodně vybere několik souhrnů řešení a ohodnotí je. V tomto případě byl výzkum proveden hned na úvod tématu kvadratických funkcí.

Všichni žáci došli alespoň k jednomu z možných řešení problému za pomoci různých postupů (odhadem, za pomoci kalkulačky, s využitím programu Geogebra nebo pomocí tabulkového procesoru).

2.2.2.3 Žákovská řešení:

1. Pomocí průsečíků dvou funkcí (kvadratické a lineární).
2. Pomocí tabulky hodnot na kalkulačce.
3. S využitím tabulkového procesoru.
4. Algebraickou úpravou a vyřešením kvadratické rovnice.

Někteří žáci nedokázali správnost řešení. Někteří sestrojili rovnici buď na základě odhadu a umocnění nebo použili přímo dosazení třetího čtverce za neznámou.

2.2.2.4 Závěr a úpravy

Závěr autoři studie vlastně neuvádí, nicméně navrhují možné úpravy studie. Mezi nimi je změna otázky v úloze tak, aby žáci hledali odpověď na otázku týkající se délky strany prostředního čtverce. Přes chybějící závěr byla studie pro tuto práci užitečným zdrojem pro zjištění možných žákovských řešení úlohy řešení pomocí kvadratické rovnice.

2.2.3 Malajsie

Překlad názvu práce je: „Analýza chyb studentů během řešení kvadratických rovnic“ a autorem výzkumu je Effandri Zakaria, z Universiti Kebangsaan Malaysia. Studie probíhala na střední škole v Indonésii a to dotazníkovou metodou na vzorku 30 žáků. Jejím cílem bylo určit, ve kterých krocích řešení kvadratických rovnic žáci dělají chyby. Konkrétní zaměření bylo na schopnost umocňování, úpravu na čtverec a řešení kvadratické rovnice pomocí diskriminantu. Na každou z těchto schopností bylo zaměřeno 5-6 úloh.

Pro vyhodnocování byla využita metoda Newmanové (rozhovorové schéma). Konkrétně v případech, kdy žák udělal v dané úloze chybu. Pokud během rozhovoru žák chybu opravil, do výsledku se nepočítala.

2.2.3.1 Vyhodnocení a závěry

Při rozkládání kvadratického dvojčlenu měli někteří žáci problém se slovem odmocnina. Často neporozuměli zadání a nebyli si jisti, co se od nich očekává. Podle autora tato neznalost vyplývá z malého prostoru pro výuku významů zadání v matematické terminologii v předchozích letech výuky matematiky. Často se objevovaly chyby ve znaménkách.

U ostatních metod nebyly takové problémy s porozuměním a častěji se objevovaly chyby v transformaci nebo procedurálních dovednostech. Většina žáků nedokázala zvládnout metodu úpravy na čtverec. U hledání řešení přes diskriminant se objevovaly největší problémy také v procedurálních dovednostech, kdy žáci měli problémy se všemi základními operacemi s výrazy (sčítání, násobení…) Obecně byla metoda řešení pomocí diskriminantu nejúspěšnější, pravděpodobně proto, že je jí obvykle věnováno nejvíce prostoru v rámci výuky.

2.2.4 Turecko

Výzkum má název: „Žákovská řešení kvadratických rovnic s jednou neznámou“[3] a jeho autory jsou: M. Gözde Didiş, Sinem Baş a A. Kürşat Erbaş, z Middle East Technical University v Antalyi v Turecku. Výzkum byl prováděn na SŠ v Antalyi a to na vzorku 113 studentů ve věku 15-16 let.

Cílem bylo zkoumat postup žákovských řešení kvadratických rovnic s jednou neznámou za pomoci rozkladu přes Viètovy vzorce. Podle autorů výzkumů je totiž tato metoda řešení v tureckém vzdělávacím systému ve stínu jiných metod řešení kvadratických rovnic (řešení přes diskriminant nebo úprava na čtverec). Autoři dále hodnotí motivaci studentů vybírat si jednotlivé metody řešení podle toho, které se jim zdají jednoduché, bez nutnosti přemýšlet nad významem používaného postupu. Konkrétně zmiňují postoj „naučit se postupy nazpaměť“, bez toho, aby žáci chápali, co a proč právě používají. Autoři studie jako možnou aplikaci výsledků této práce vidí seznámení učitelů matematiky s nejčastějšími problémy žáků při řešení kvadratických rovnic s jednou neznámou a tedy možnou změnu pedagogických postupů při vysvětlování této problematiky.

2.2.4.1 Metodologie výzkumu

Autoři textu vybrali sedm otevřených testových úloh. První čtyři úlohy byly navrženy tak, aby odhalily schopnosti žáků postupovat jednotlivými kroky při řešení kvadratických rovnic (procedural skills). Otázky 5-7 obsahovaly jak zadání rovnice, tak i nástin možného řešení. Žáci pak měli zhodnotit navrženou metodu řešení konkrétní kvadratické rovnice a zdůvodnit svůj postoj. Žáci měli 30 minut na splnění obou částí testu.

2.2.4.2 Způsob vyhodnocování

Nejdříve byla provedena kvantitativní analýza výsledků. Každá otázka byla hodnocena buď jedním bodem (v případě správného postupu řešení i výsledku) nebo žádným bodem (pokud byl chybný postup nebo chybný výsledek).

Kvalitativní vyhodnocení spočívalo v podrobné analýze jednotlivých kroků u každé úlohy a zhodnocení míry porozumění úloze. Autoři procházeli nesprávná žákovská řešení krok za krokem. Dva nezávisle pracující hodnotitelé zhodnotili typ každé chyby. Každá chyba pak byla oběma hodnotiteli zařazena do předem připravených kategorií chyb.

[3] V orig.: *Student´s reasoning in quadratic equations with one unknown*, překl.: autor práce

2.2.4.3 Vyhodnocení

V prvním bodě se autoři věnují schopnosti žáků najít kořeny kvadratické rovnice ve standardní podobě:

$$ax^2 + bx + c = 0;\ a, b, c \in R$$

Téměř všichni studenti vyřešili rovnici rozkladem.

V dalších úlohách byla jiná struktura zadané kvadratické rovnice:

$$ax^2 - bx = 0$$

Jen 64 % žáků správně vyřešilo tuto rovnici. Autoři nejčastěji zachytili dva typy chyb:

- Převedení členu $-bx$ a pravou stranu a následné chybné zkrácení členu x na obou stranách rovnice. Tím pádem respondenti ztratili jeden kořen rovnice $x = 0$.
- Druhou častou chybou byla chyba v rozkladu rovnice.

2.2.4.4 Zhodnocení výsledků

Studie dle autorů ukázala, že většina žáků používá metodu rozkladu při řešení kvadratických rovnic o jedné neznámé. Žáci znají postupy řešení, ale používají je bez ohledu na kontext a matematickou správnost. Ve studii se objevily určité známky toho, že žáci postupu používají pouze instrumentálně a bez hlubšího pochopení. Pro detailnější analýzu příčin by bylo třeba individuálních rozborů chyb s každým žákem. Výsledky navíc ukázaly, že žáci mají tendenci nesprávně přenášet způsob řešení jednoho typu rovnice k jinému, což jen dále dokládá pouze instrumentální používání matematických postupů.

2.2.5 Zhodnocení studií

Jak je zmíněno i v turecké studii, jedním ze základních témat vyučovaných v matematice na středních školách jsou kvadratické rovnice. Přesto není příliš mnoho studií a výzkumů, které by se jejich tématu věnovaly. Zkoumání žákovských řešení slovních úloh je Francie 1 nejblíže z popisovaných studií.

Tato studie se věnuje různým žákovským řešením slovní úlohy, přičemž autorka předpokládá celkem pět možností, jak by žákyně mohly úlohu řešit. Jednou z těchto metod je sestavení kvadratické nerovnice, kterou dvě z pěti žákyň použily. Autorka stručně popisuje, že chyby v řešení přes kvadratickou nerovnici se objevovaly v úpravách algebraických výrazů.

Studie Francie 2 měla více respondentů a velmi zajímavou kvadratickou úlohu. Bohužel jako výsledek poskytla pouze způsoby, jak žáci úlohy řešili, ale už ne, kde v daných typech řešení dělali chyby. Tomuto se naopak podrobněji věnuje studie Malajsie, která zkoumá dle Newmanové metody (podrobnější popis v kapitole 4.6.1), v které etapě procesu řešení úlohy na kvadratickou rovnici dělají žáci chybu. V této studii se ovšem nejedná o slovní úlohy, spíše o slovní zadání matematických úloh.

Zásadní pro tuto práci je právě to, že se ve studii Malajsie objevuje metoda Newmanové, pomocí které je možné rozdělit řešení složitějších problémů na jednotlivé etapy a zkoumat, ve které má žák problémy. Díky tomu se poté učitel může zaměřit na problematické etapy řešení ve výuce.

Studie Turecko poskytuje náhled na skutečnost, jak žáci vybírají metodu, kterou budou při řešení úlohy používat, a především také poskytuje informace, kde konkrétně žáci dělají v řešení kvadratických rovnic chyby.

3 Metodologie

V této kapitole je popsáno téma, cíle a hypotézy a také popis výzkumu a sběru dat.

3.1 Téma

Tématem práce jsou žákovská řešení slovních úloh řešených kvadratickou rovnicí. Jak vyplynulo z analýzy dostupných učebnic, není návodu k řešení takových slovních úloh věnováno příliš prostoru a to i přesto, že jsou kvadratické rovnice považovány za jeden ze základních výstupů matematického vzdělání středoškolských žáků. Výzkumu žákovských řešení tohoto typu slovních úloh nebo i jen kvadratických rovnic je věnováno jen několik studií či výzkumů a to především v zahraničí.

3.2 Cíle a hypotézy

Základním cílem této práce je zjistit a popsat, jak jsou žáci na výběrové škole (gymnáziu) a průměrné střední škole (soukromá obchodní akademie) schopni řešit slovní úlohy na kvadratické rovnice. Zachytit jejich problémy při řešení takových slovních úloh a popřípadě navrhnout možné způsoby, jak tyto problémy minimalizovat.

Cílem vedlejším je naučit se pracovat s pedagogickým výzkumem metodou vhodnou pro více matematických tematických celků. Dalším vedlejším cílem je využít nahrávek k lepšímu budoucímu vedení rozhovorů se žáky nad řešením úloh.

3.2.1 Hlavní hypotéza

Pro žáky je obtížnější etapa transformace slovního vyjádření do kvadratické rovnice, než řešení samotné kvadratické rovnice a než etapa dekódování.

3.2.2 Vedlejší hypotézy

[1] Žáci z gymnázia budou při transformaci úlohy do kvadratické rovnice úspěšnější, než žáci obchodní akademie.

[2] Žáci z gymnázia budou úspěšnější v procedurálních dovednostech než žáci obchodní akademie.

[3] Žáci z obchodní akademie budou celkově méně úspěšní, než žáci gymnázia.

3.3 Sběr dat

Mým cílem nebylo primárně zjistit, nakolik jsou frekventované různé problémy, které žáci při řešení slovních úloh vedoucích na kvadratickou rovnici mají, ale především proč k nim dochází. Rozhodl jsem se proto pro smíšený, dominantně však kvalitativní výzkum. Jeho požadavky, tedy sběr většího množství dat od menšího počtu respondentů byly rovněž snáze splnitelné, než v případě kvantitativního výzkumu, který by vyžadoval rozsáhlý vzorek respondentů.

Každý žák dostal při výzkumu jednu (všichni žáci měli stejnou) slovní úlohu, při jejímž řešení byl natáčen videokamerou. Řešení prováděl samostatně, bylo-li to možné. V případě zásadních problémů, kdy žák nebyl schopen pokračovat v řešení samostatně, jsem se mu snažil sdělením co nejmenšího množství informací (většinou jen návodnými otázkami) pomoci problematické místo překonat. U každého žáka bylo proto možné sledovat všechny fáze postupu. Díky videozáznamu jsou zachyceny všechny otázky, které žáci vznesli, rozbory situací, které jsem s nimi prováděl, a především postup jejich řešení. Ukázka přepisu jednoho záznamu je v příloze.

Výzkum probíhal od 25. 1. 2016 do 26. 2. 2016.

3.4 Výzkumný vzorek

Vlastní výzkum jsem provedl na dvou školách. První je PB – VOŠ a SŠ managementu, kde učím matematiku. Jedná se o velmi malou soukromou školu o celkovém počtu žáků 56. Její název neodpovídá příliš zaměření, jedná se totiž o klasickou obchodní akademii a profilovými předměty jsou ekonomika a účetnictví. Škola má velké množství (odhadem 75%) žáků, kteří se naplno věnují sportu (nejčastěji hokeji) a řada z nich je v mládežnických reprezentacích. Proto ve škole velmi často chybí. Na této škole proběhl i pilotní výzkum.

Řešit kvadratické rovnice se žáci učí ve druhém ročníku. V ŠVP jsou k tomuto tématu formulovány výstupy uvedené v levém a tematické celky uvedené v pravém sloupci:

Žák	
- Popíše souvislosti mezi kvadratickou funkcí a kvadratickou rovnicí, - Rozliší úplnou a neúplnou kvadratickou rovnici, - Zná vzorec pro řešení úplné kvadratické rovnice, umí rozhodnout o počtu řešení na základě hodnoty diskriminantu,	- Uvede vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice a použije je při řešení úloh, - Převede kvadratický trojčlen na součin lineárních činitelů, - Použije vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu při řešení iracionálních rovnic, - Rozlišuje úpravy rovnic na ekvivalentní a neekvivalentní, - Obhájí řešení iracionální rovnice na základě provedené zkoušky,

- Využívá získané poznatky při matematizaci reálných situací,
- Aplikuje poznatky o kvadratických rovnicích, rozkladu kvadratického trojčlenu a kvadratických funkcí při řešení kvadratických nerovnic,
- Formuluje pojem parametr, rovnice s parametrem,
- Rozliší lineární a kvadratickou rovnici s parametrem,
- Použije vhodné metody řešení rovnic a diskutuje počet řešení vzhledem k parametru,
- Vyjádří řešení a prověří jeho správnost,
- Využívá znalosti řešení soustav lineárních nerovnic při výpočtu jednoduchých ekonomických úloh,

Tematické celky

Kvadratická rovnice a nerovnice

- Řešení úplné a neúplné kvadratické rovnice
- Rozklad kvadratického trojčlenu
- Vztahy mezi kořeny a koeficienty
- Iracionální rovnice
- Kvadratická rovnice s parametrem
- Kvadratický rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou
- Soustavy kvadratických a lineárních rovnic se dvěma neznámými
- Kvadratické nerovnice, jejich početní a grafické řešení
- Slovní úlohy

(Škola – PB VOŠ a SŠ managementu, 2014)

Druhou školou, na níž jsem výzkum realizoval, je gymnázium Opatov, jež je klasickým gymnáziem se všeobecným zaměřením. Kapacitu má 600 žáků, přičemž současný stav je o něco nižší. Škola se pravidelně účastní mnoha žákovských vědomostních soutěží např. matematické či logické olympiády, a často je v nich úspěšná. Vypovídá o tom i umístění v žebříčku Excelence středních škol 2015, který vyhodnocuje ministerstvo školství dle výsledků ve školských vědomostních soutěžích, kde se gymnázium Opatov umístilo na prvním místě mezi školami v Praze.

Kvadratické rovnice se na tomto gymnáziu probírají v kvintě osmiletého gymnázia. V ŠVP se tato látka vyskytuje v tematickém celku Rovnice a nerovnice, kde je uvedeno:

Žák

- řeší lineární a kvadratické rovnice, nerovnice a jejich soustavy, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení
- rozlišuje důsledkové a ekvivalentní úpravy, zdůvodní kdy je zkouška nutnou součástí řešení
- geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkční vztahy, graficky znázorňuje řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav
- analyzuje a řeší problémy, v nichž aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav

- lineární rovnice a nerovnice
- kvadratická rovnice (diskriminant, vztahy mezi kořeny a koeficienty, rozklad kvadratického trojčlenu, doplnění na čtverec)
- kvadrartická nerovnice
- rovnice a nerovnice v součinoém a podílovém tvaru
- rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou
- rovnice s neznámou ve jmenovateli a pod odmocninou
- lineární a kvadratická rovnice s parametrem
- soustavy lineárních rovnic a nerovnic

(Škola – gymnázium Opatov, 2007)

3.5 Žáci

Celkem jsem do výzkumu zahrnul pět žáků z každé školy a jednoho z gymnázia Opatov navíc (vysvětlení v kapitole 5.2.2). Žáky jsem vybíral účelovým[4] výběrem tak, aby byli

[4] V (Vojtíšek, 2012) je k účelovému výběru uvedeno: Tento výběr je veden výhradně záměrem výzkumníka, který rozhoduje, kdo bude nejlépe odpovídat potřebám a zaměření jeho výzkumu. Ovšem výběr musí být předem argumentován a měl by jasně reprezentovat zamýšlenou populaci. U účelového výběru nelze mít ambice na reprezentativitu a je určen pro kvalitativní výzkumy.

rozvrstveni v ročnících i jejich výsledcích v matematice. Vybral jsem proto z každé školy žáka, který kvadratické rovnice probíral v letošním roce, žáka který má odstup jednoho roku a také žáka, který je v posledním ročníku. Zároveň jsem se snažil vybírat žáky, kteří v matematice dosahují nadprůměrných výsledků, průměrných výsledků a podprůměrných výsledků. Při určování těchto žáků jsem se řídil známkou na vysvědčení i doporučením učitele.

Jména jednotlivých žáků jsou smyšlená, odpovídá pouze pohlaví. Žáci v pilotní studii jsou označováni náhodnými křestními jmény s počátečními písmeny z konce abecedy, žáci ve vlastním výzkumu jsou označeni náhodnými jmény s počátečními písmeny ze začátku abecedy.

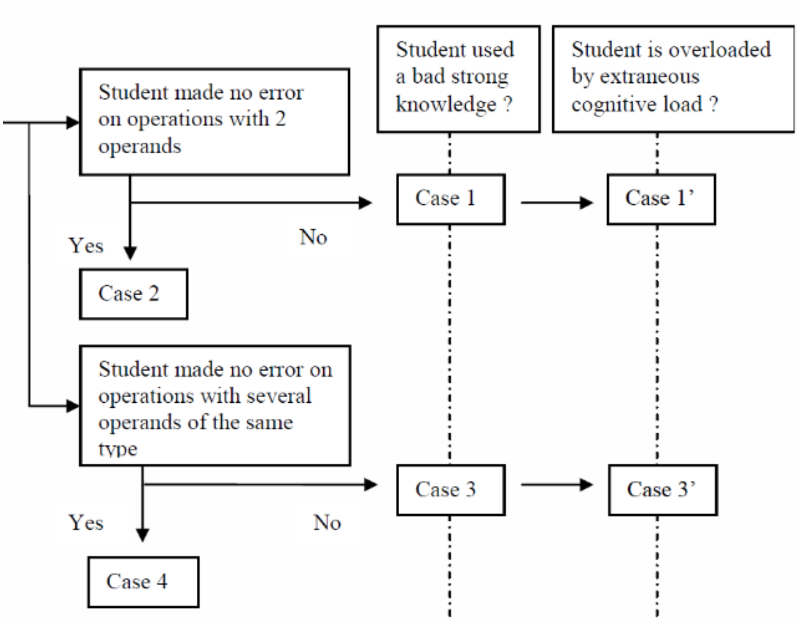
3.6 Metoda vyhodnocování

Při vyhodnocování žákovských řešení jsem se rozhodl použít Newmanové metodu pro analýzu chyb při řešení matematických úloh[5]. Dále ji nazývám pouze Newmanové metoda. Metodu vytvořila v M. Anne Newmanová pro hledání problémů při řešení slovních úloh. Díky obecnosti metody byla však několikrát použita i při výzkumech v jiných oblastech (např. v medicíně).

Rozhodoval jsem se kromě této metody (Newmanové) mezi ní a Héroldovou kognitivní analýzou[6], která je popsána v (Hérold, 2014). Tato analýza využívá předem připraveného diagramu pro vyhodnocování jednotlivých řešení. Je v něm přesně zadaná posloupnost otázek, na které je vždy odpověď ano/ne a odpovídá na ně experimentátor, po dané odpovědi následuje přesun na další otázku, popř. určení do které kategorie žák spadá.

[5] V orig.: *The Newman Procedure for Analysing Errors on Written Mathematical Tasks*, překl.: autor práce
[6] V orig.: *A Cognitive Analysis of Students' Activity*, překl.: autor práce

Část diagramu metody (pro počítání s celými čísly:



(Hérold, 2014)

Obr. 2 - Ukázka diagramu Héroldovy metody

Metodu jsem nepoužil, neboť se z mého pohledu hodí pro úlohy jednodušší a spíše algoritmické (počítání se zápornými čísly, řešení určitého typu rovnic atd.), než pro slovní úlohy, kde posloupnost kroků není jednoznačně dána a také je možno alespoň v určitých fázích postupovat různými matematickými úvahami či postupy. Nevýhodu pro využití v této práci spatřuji i v množství úprav, které by bylo nutné udělat pro využití při zkoumání žákovských řešení slovních úloh.

3.6.1 Newmanové metoda

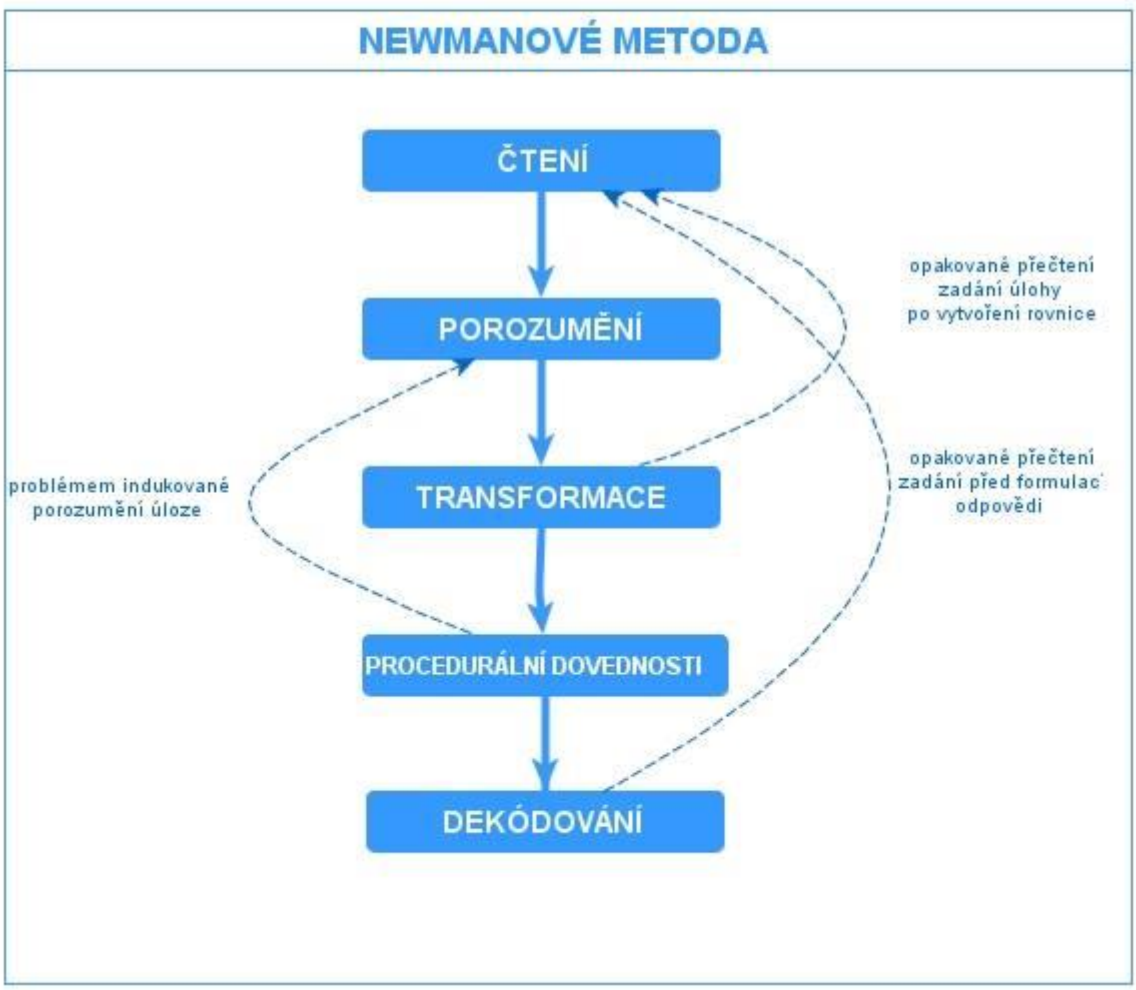
Základním pilířem metody je určení hierarchie řešení každého problému. Newmanová určuje tuto posloupnost pěti etap, kterou je potřeba projít, aby byla úloha řádně vyřešena:

1. Přečíst úlohu (Reading)
2. Rozumět tomu, co jsme přečetli (Comprehension)
3. Transformovat slova do (matematicky) řešitelného problému a výběr vhodné strategie (Transformation)
4. Správné použití matematického aparátu na základě vybrané strategie (Process skills)

5. Převod matematického výsledku do slovního vyjádření odpovědi na zadanou otázku. (Encoding)

V celé práci označuji jednotlivé členy posloupnosti této metody jako etapy. Jednalo se z mého pohledu o vhodnější výraz, než například kroky, které subjektivně vnímám jako kratší celky, zatímco zde například 4. etapa obsahuje „kroků“ několik. Bohužel se mi nepodařilo nalézt ustálený český překlad jednotlivých etap, můj překlad a stručný popis následuje po diagramu Newmanové metody.

Posloupnost etap vyjadřuje, že aby se řešitel problému dostal k řešení, je třeba projít všechny etapy postupně. Především v komplexnějších úlohách se ale stává, že průchod etapami není zcela lineární, ale řešitel se k některým etapám vrací. Kupříkladu se to týká opětovného přečtení úlohy před formulací odpovědi. Některé návraty k předchozí etapě jsou vyjádřené na následujícím diagramu, který metodu stručně popisuje:



Obr. 3 - Diagram Newmanové metody

3.6.1.1 Popis etap metody

Jak je výše již zmíněno, Newmanové metoda je velmi obecný nástroj pro vyhodnocování a proto bylo nutné upravit a konkretizovat jednotlivé průchody etapami. V následujících řádcích se proto vyskytuje konkrétní popis jednotlivých etap řešení úlohy podrobně rozepsaný. Mimo jiné zde uvádím konkrétní příklady toho, jakým způsobem jsem vyhodnocoval, zda danou etapou žák úspěšně prošel, nebo naopak zda se v ní vyskytl problém.

Reading – Čtení

Newmanová ho chápe skutečně jako prosté přečtení dané úlohy. Jelikož se v našich podmínkách nedá předpokládat, že by kterýkoliv žák neuměl přečíst text psaný v mateřském jazyce, rozhodl jsem se v této etapě zkoumat porozumění slovním obratům a matematickým výrazům použitým v zadání. Konkrétně se v úloze použité při výzkumu jedná o pojmy obsahu obrazců (obdélníku a čtverce) a také o rozdíl mezi metrem a metrem čtverečním.

U pojmu obsahu obdélníku nebo čtverce tím rozumím skutečně základní porozumění, nevyžaduji tedy znalost vzorce, ale správné chápání pojmu jako velikosti části roviny obsažené v daném obrazci.

Comprehension – Porozumění

Až na výjimky považuji za porozumění dané úloze přeformulování otázky do jejich jazyka (konkrétně aby mi to řekli svými slovy) a vytvoření správného náčrtu. V případě, že by náčrt nebyl proveden, ale úloha byla vyřešena správně, považuji tento stupeň za splněný. Pokud byl náčrt bez mé pomoci nekompletní (např. chybělo znázornění šířky cestiček), což vedlo k „zaseknutí“ a nepokračování žáka v řešení, považuji tuto etapu za celkově neúspěšnou.

Do této etapy spadá i prokázání porozumění vztahům v úloze na konkrétních číslech (nikoliv neznámých). Dále přikládám ukázku rozhovoru, kde zjišťuji, zda žák porozuměl úloze:

ČAS	EXPERIMENTÁTOR	ŽÁK	CO ŽÁK DĚLÁ	CO SE DĚJE
4:00		A když jsem teďka vypočítal ten obsah, tak musim zjistit... vlastně...		
4:05	Já se jenom tak zeptám. Když jste si to přečetl, rozumíte tomu, co se tam děje? Jestli byste mi to zkusil, nějak srozumitelně, jenom jako laicky… řekněme, kdybyste mi měl vysvětlit, o co v té úloze jde…			
4:15		Jde o to, abych já zjistil... jak tu šířku těch cestiček. Jak budou široký.		
4:21	A ty tam někde máte ty cestičky?	No ještě ne no.		
4:30	Tak dobrý, to já se jenom ptám.	Musej bejt stejně velký a musej bejt ve tvaru obdelníku, takže třeba takhle může bejt cestička…No…	kreslí cestičky do obdelníku	

Tab. 1 - Ukázka rozhovoru

Účelem této části rozhovoru bylo zjistit, zda žák porozuměl danému zadání a zda je schopen vlastními slovy říci, co se po něm požaduje. Z rozhovoru je patrné, že úloze porozuměl.

Transformation – Transformace

Za splnění této etapy řešení považuji správné sestavení rovnice druhého stupně, popřípadě správné soustavy více rovnic.

Process skills – Procedurální dovednosti

Vzhledem k tomu, že tato etapa je ze všech nejnáročnější na předchozí znalosti, rozdělil jsem ji do více podetap, ve kterých jsem předpokládal, že by žáci mohli mít obtíže:

1. znalost vzorců – konkrétně pro obsahy obdélníku a čtverce, objem krychle, vzorec pro diskriminant, metody řešení dvou rovnic o dvou neznámých [označuji jako PD – vzorce]
2. práce s výrazy – v závislosti na zvoleném způsobu řešení je potřeba umět výrazy pouze sčítat, nebo také násobit, zjednodušování rovnice (především dělení celé rovnice stejným číslem/výrazem, násobení celé rovnice číslem/výrazem) [označuji jako PD – výrazy]

3. práce se znaménky – minus před závorkou, dva minusy za sebou, minus lomeno minus [označuji jako PD – znaménka]

Mezi neznalostí vzorců a práci s výrazy je někdy tenká hranice. Na příkladu s mocninou dvojčlenu $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ bych rád ukázal, jak jsem hodnotil různé jevy. Pokud žák využíval tento vzorec a ten užil chybně, spadá to do kategorie neznalosti vzorců (i třeba jen pokud bylo jasné, že vzorec chce použít, ale není toho schopen kvůli neznalosti). Pokud násobil dvě závorky, jedná se z mého pohledu o práci s výrazy.

Jak vyplývá z jejich vymezení, nejsou podetapy etapami v tom smyslu, že by stejně jako etapy tvořily časovou posloupnost. Jsou vytvořeny jako tematické celky, které tvoří podstatné složky procedurální dovednosti. Používány jsou však v různém pořadí a opakovaně.

Encoding – Dekódování

Za bezproblémový průchod touto etapou budu považovat správné zformulování odpovědi z výsledků kvadratické rovnice. Žák zde prokáže schopnost návratu od matematické úlohy zpět k původnímu reálnému kontextu. V podstatě se jedná o vyloučení nevyhovujícího kořene rovnice na základě posouzení zadání a zároveň prokazuje porozumění komplexnosti celé úlohy.

Shrnutí

Pokud se žákovi při řešení nepodaří přes danou etapu úspěšně projít, dostane se mu ode mě pomoci dle potřeby. Tou nejmenší pomocí je návodná otázka, popřípadě poukázání na kontrolu napsaného, druhým extrémem je nadiktování správného konce etapy, aby se mohl pustit do další. Jako příklad tohoto extrému může sloužit nadiktování správné rovnice, pokud při experimentu usoudím, že žák není schopen se k ní ani s mou pomocí sám dostat. Cílem je poznat, zda by alespoň potom byl schopen dalšími etapami projít. Pokud žák nedokáže sestavit rovnici, ale je poté schopen správně interpretovat případné její výsledky, je na tom jinak než ten, který by ani při dosažení výsledků rovnice nedokázal odpovědět na otázku zadanou v úloze.

Stupně průchodu etapou

Abych mohl žáky porovnat mezi sebou i obecně popsat, jak danou úlohu zvládli, ohodnotil jsem zvládnutí každé etapy, resp. jedním z následujících pěti stupňů:

- A – Žák etapou prošel zcela samostatně.
- B – Žák etapou prošel s drobnou chybou, kterou by po delším přemýšlení pravděpodobně sám odhalil.
- C – Žák etapou nebyl samostatně schopen projít, ale výraznou poskytnutou pomoc pochopil a byl by zřejmě schopen ji znovu využít.
- D – Žák etapou nebyl schopen samostatně projít a pravděpodobně ani zcela nepochopil předložené řešení.
- N – Nelze určit, především pokud se žák nebyl schopen dostat do situací, dle kterých by bylo možné průchod etapou pozorovat.

Rozřazení do jednotlivých stupňů je do značné míry subjektivní, což je i důvodem volby stupňů pomocí písmen nikoli čísel, nejedná se tedy o ryzí statistiku. Ze zřejmých důvodů zde hraje velkou roli můj názor na to, zda žák dosáhl stupně např. B nebo C. S tímto problémem se ovšem potýká jednak každý experimentátor při využití rozhovoru a následného rozboru a také každý učitel, který se snaží ohodnotit žáky jednak spravedlivě, ale také s co největší snahou o pochopení jejich myšlenky.

Pokud např. žák nezná vzorec pro diskriminant zpaměti, ale jinak je dále jeho řešení bezchybné a s ostatními vzorci nemá problémy, je hodnocen stupněm B. Jestliže nezná vzorec pro diskriminant a ještě jeden navíc, nebo není schopen ho použít, je hodnocen stupněm C, popř. D.

3.7 Ověření hypotéz

Ověření hypotéz budu provádět podle hodnocení stupni zavedenými v předchozím oddíle. Při porovnávání dvou vzorků (v hlavní hypotéze etap přes všechny žáky, ve vedlejších jedné či všech etap přes žáky jedné školy) jsem postupoval tak, že jsem z příslušných souborů nejprve vyřadil stejné stupně (takže každý stupeň zůstal jen v jednom souboru, a to v tom, kde se vyskytoval vícekrát) a následně jsem sečetl rozdíly mezi zbylými stupni (rozdílem mezi dvěma stupni rozumím rozdíl mezi pořadím hodnotících znaků v abecedě). Taková metoda by nebyla korektní, pokud by všechna hodnocení zbylá v jednom souboru nebyla nižší než ve druhém, protože by se rozdíly buď anulovaly (pokud bychom rozdíl počítali vždy ve stejném pořadí a mohl by tedy mít různá znaménka) nebo by ukazovaly rozdílnost souborů, ale nikoli kvalitativní rozdíl vzorků (pokud bychom rozdíly počítali jako vždy kladné). Taková situace však ve zkoumaném vzorku nenastala. Vzdálenost od N nehodnotím, a jestliže nějaký žák dosáhl v etapě tohoto stupně, do hodnocení není v dané etapě zahrnut.

Hlavní hypotézu budu považovat za platnou pro daný vzorek žáků, jestliže celkový rozdíl hodnot těchto etap bude alespoň pět stupňů (což by znamenalo, že pro nejméně polovinu žáků z výzkumného vzorku byl průchod touto etapou obtížnější).

Vedlejší hypotézu [1] budu považovat za platnou, pokud se rozdíl dosažených hodnot v této etapě nebude celkově lišit o více, než dva stupně.

Vedlejší hypotézu [2] budu považovat za platnou, jestliže se rozdíl dosažených hodnot v této etapě bude lišit o více než 6 stupňů. Vzhledem k tomu, že v této etapě jsou zahrnuty tři podetapy, stačilo by například, aby se dohromady žáci v podetapě *PD – vzorce* lišili o 4 stupně a v *PD – výrazy* o 3 stupně.

Vedlejší hypotézu [3] budu považovat za platnou, pokud budou rozdíly mezi žáky jednotlivých škol menší než rozdíly mezi školami.

3.8 Úloha

Vzhledem k cíli práce jsem se snažil vybrat pro pilotní výzkum úlohu, která bude patřit k obtížnějším slovním úlohám řešeným pomocí kvadratické rovnice. Vylučoval jsem úlohy z kategorie úloh o společné práci, nebo fyzikální tematikou, neboť v prvním případě je téměř nutné mít znalost řešení takových úloh a další postup je více či méně algoritmický, ve druhém případě je třeba mít znalosti fyzikálních vzorců (nebo musí žáci vzorec dostat napsaný) a to nebylo předmětem zkoumání. Nehledal jsem úlohu, která bude mít více možností, jak k řešení dospět a vylučoval jsem i úlohy, jejichž výsledkem je malé přirozené číslo, které lze snadno uhodnout náhodou při zkoušení různých čísel. U každé úlohy použité v pilotní studii nebo vlastním výzkumu uvedu autorské řešení.

3.8.1 Úloha 1

Úloha byla vybraná tak, aby splňovala výše uvedené požadavky. Chtěl jsem také, aby nebyla pro žáky známá a proto jsem ji záměrně vybral z (Calda, 1996). Jedná se o učebnici, se kterou nepracuje ani jedna škola, na nichž výzkum probíhal, a proto se dalo očekávat, že žáci se přímo s touto úlohou zatím nesetkali.

Studenti Milan a Karel mají v přípravě na zkoušku prostudovat celkem 480 stránek. Milan chce každý den přečíst stejný počet stránek, Karel také, ale protože půjde ke zkoušce o pět dní dříve než Milan, musí jich denně přečíst o šestnáct více. Určete, kolik dní zabere příprava ke zkoušce každému z nich. (Calda, 1996)

Autorské řešení:

Počet stránek, které chce Milan prostudovat za den, označíme m. Jelikož Karel musí prostudovat denně o 16 stránek více, denně prostuduje $(m + 16)$ stránek.

Jako d označíme počet dní, které zbývají Milanovi do zkoušky. Potom tedy $(d - 5)$ je počet dní, které do zkoušky zbývají Karlovi.

Pokud vynásobíme u Milana i Karla počet stránek za den počtem dní, dostaneme celkový počet prostudovaných stránek, tedy 480. Zapíšeme do rovnic:

$$m \cdot d = 480$$
$$(m + 16) \cdot (d - 5) = 480$$

Po úpravě první rovnice získáme tvar:

$$m = \frac{480}{d}$$

A nyní dosadíme do druhé rovnice a tu pak upravíme na kvadratickou rovnici, kterou následně zjednodušíme:

$$\left(\frac{480}{d} + 16\right) \cdot (d - 5) = 480$$
$$480 - \frac{2400}{d} + 16d - 80 = 480$$
$$-\frac{2400}{d} + 16d - 80 = 0$$
$$-2400 + 16d^2 - 80d = 0$$
$$d^2 - 5d - 150 = 0$$

Nyní pomocí Viètových vzorců získáme rozklad trojčlenu a z něj jednotlivé kořeny kvadratické rovnice:

$$(d - 15) \cdot (d + 10) = 0$$
$$d_1 = 15$$
$$d_2 = -10$$

Jelikož hledáme počet dní, záporný výsledek nás nezajímá. Milanovi tedy zbývá do zkoušky 15 dní a Karlovi 10.

<u>Odpověď:</u>

Karlovi zbývá do zkoušky 10 dní a Milanovi 15 dní.

Komentář:

Úloha byla na první dva žáky příliš složitá a řešili ji s velkými obtížemi a velmi dlouho. Sestavit soustavu dvou rovnic a následně z této soustavy získat jednu kvadratickou rovnici o jedné neznámé mi v tu chvíli přišlo moc obtížné. Proto jsem u třetího žáka použil úlohu 2.

3.8.2 Úloha 2

Vzhledem k výše popsanému jsem změnil úlohu pro další žáky v pilotní studii. Vzhledem k tomu, že jsem třetího žáka natáčel stejný den jako první dva, úlohu jsem změnil narychlo za jednu ze sbírky příkladů (Petáková, 1998)

> Malý Pavel skládal kostky stavebnice (kostka má tvar krychle). Chtěl postavit velkou krychli. Zbylo mu však 75 kostek, proto hranu zvětšil o jednu kostku. Potom mu ale 16 kostek chybělo. Kolik kostek měl ve stavebnici? (Petáková, 1998)

Autorské řešení:

Počet kostek v hraně první krychle, kterou Pavel postavil, si označíme h. První velká krychle tedy obsahovala h^3 kostek.

Druhá velká krychle měla hranu $(h+1)$ a v této krychli bylo $(h+1)^3$ kostek.

Můžeme tedy sestavit rovnici:

$$h^3 + 75 = (h+1)^3 - 16$$

Roznásobíme závorku vpravo a převedeme všechno na levou stranu:

$$h^3 + 75 = h^3 + 3h^2 + 3h + 1 - 16$$
$$3h^2 + 3h - 90 = 0$$
$$h^2 + h - 30 = 0$$

Rozložíme trojčlen na levé straně pomocí Viètových vzorců a získáme kořeny:

$$(h-5) \cdot (h+6) = 0$$
$$h_1 = 5$$

$$h_2 = -6$$

Záporný kořen lze z uvažování vyloučit, jelikož hledaný počet kostek musí být nezáporný. Abychom dostali počet kostek, musíme umocnit hranu na třetí a přičíst 75 dle zadání

$$5^3 + 75 = 125 + 75 = 200$$

<u>Odpověď:</u>

Malý Pavel má ve stavebnici 200 kostek.

Komentář:

Řešení úlohy dvěma žáky v pilotní studii mělo hladší průběh. Přesto se objevily problémy se třetí mocninou a především pak s umocněním dvojčlenu na třetí. Jelikož předmětem zkoumání této práce nebyla třetí mocnina, rozhodl jsem se zpřísnit kritéria pro hledanou úlohu.

Mezi základní požadavky stále patřilo, aby úlohu nebylo možné vyřešit prostým uhodnutím výsledku a také aby měla složitější zadání (nepřicházely v úvahu např. úlohy typu: hledáme dvě čísla…) a také, aby ji žáci pravděpodobně viděli poprvé (tedy aby nebyla z učebnice či sbírky příkladů, kterou používají). Mezi nové požadavky na úlohu jsem zařadil, aby řešení neobsahovalo matematické jevy složitějšího charakteru, které nesouvisí s řešením kvadratických rovnic. Např. tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých (respektive, aby pokud ji úloha bude obsahovat, bylo možné tuto soustavu řešit pouze v hlavě).

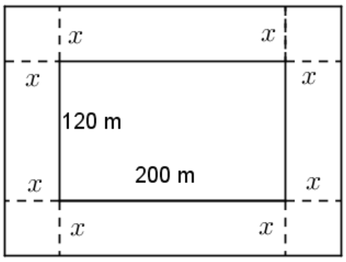
Dále jsem chtěl, aby určení správného řešení úlohy bylo obtížnější, tedy aby vycházely oba kořeny kvadratické rovnice kladné (nikoliv jeden záporný, který potom není obtížné vyloučit)

Rozhodl jsem se, že tedy naleznu úlohu geometrickou, jelikož taková většinou nepožaduje příliš znalostí z jiných oblastí matematiky, než těch zcela základních (vzorce pro obsah, obvod, znalost základních geometrických tvarů).

3.8.3 Úloha 3

V samotném výzkumu nebyla úloha 3 vůbec použita, ale vycházel jsem z ní při tvorbě úlohy, kterou jsem nakonec použil. Tuto jsem nepoužil tak jak je zadaná ze dvou důvodů. Tím hlavním je zaokrouhlování při výpočtu odmocniny z diskriminantu a tím druhým, že je u ní obrázek, který situaci značně ulehčuje oproti pouze slovnímu vyjádření.

Výměra obdélníkové parcely, jejíž strany mají délky 200 m a 300 m, se má zvětšit o 1 ha tak, že podél všech jejích stran se připojí pás všude stejně široký. Určete jeho šířku. (Calda, 2003)

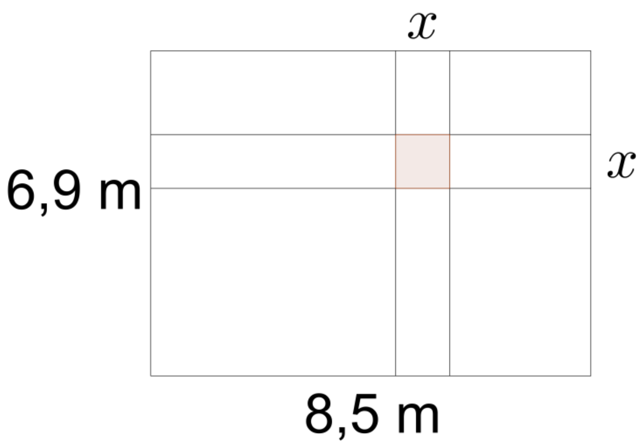


3.8.4 Úloha 4

Z výše uvedených důvodů byla nakonec ve výzkumu použita následující úloha:

Maminka má záhon ve tvaru obdélníku se stranami 6,9 m a 8,5 m a přeje si ho rozdělit pomocí dvou stejně širokých cestiček na čtyři (ne nutně stejně velké) záhony ve tvaru obdélníku. Syn Pavel slíbil obě cestičky vytvořit, ale zapomněl, jakou mají mít šířku. Pamatoval si pouze, že maminka přijde o 6 m^2 záhonu. Jaká je šířka cestiček?

Autorské řešení:



Nejprve si načrtneme obrázek celé situace. Je na něm vidět celý záhon i s cestičkami a také všemi rozměry. Šířku cestiček si označíme x. Cestičky jsou dva obdélníky. Jeden se stranami 6,9 m a x, druhý se stranami 8,5 m a x.

Obsah jednoho obdélníku (cestičky) můžeme proto vyjádřit jako $8{,}5x$ a obsah druhého obdélníku jako $6{,}9x$. Pokud obsahy obou cestiček sečteme, dostaneme dle zadání

6 m², ovšem s tím, že čtverec, kde se oba obdélníky překrývají, máme dvakrát. Je tedy třeba ho od součtu obsahů odečíst, abychom dostali rovnost:

$$8{,}5x + 6{,}9x - x^2 = 6$$
$$x^2 - 15{,}4x + 6 = 0$$

Máme kvadratickou rovnici a tu vyřešíme pomocí diskriminantu:

$$D = (-15{,}4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 213{,}16$$

Z diskriminantu získáme dle vzorce kořeny:

$$x_1 = \frac{-(-15{,}4) + \sqrt{213{,}16}}{2 \cdot 1} = \frac{15{,}4 + 14{,}6}{2} = \frac{30}{2} = 15$$
$$x_1 = \frac{-(-15{,}4) - \sqrt{213{,}16}}{2 \cdot 1} = \frac{15{,}4 - 14{,}6}{2} = \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4$$

Vzhledem k tomu, že rozměry záhonu jsou 8,5 m a 6,9 m, nemůže být šířka cestičky 15 m. vyhovující je tedy pouze šířka 0,4 m.

Odpověď:

Šířka obou cestiček je 0,4 m.

4 Výzkum

V této kapitole popisuji nejprve průběh a vyhodnocení pilotní studie a poté průběh a vyhodnocení vlastního výzkumu. Na konci kapitoly je poté statistické shrnutí a závěry učiněné z výzkumu.

4.1 Pilotní studie

Abych zjistil, zda je vhodná vybraná metodika i slovní úloha, provedl jsem pilotní studii na PB – VOŠ a SŠ managementu. Celkem jsem si vybral tři žáky, z nichž dva byli ze třetího a jeden ze čtvrtého ročníku. Vzhledem k tomu, že matematika je pro řadu žáků na této škole okrajovou záležitostí a obecně jsou pro ně slovní úlohy velmi těžkou látkou, snažil jsem se vybrat takové žáky, kteří budou patřit v matematice k lepším. Vždy po jednom jsem je posadil do PC učebny, která je ve sklepě a okolo dveří je z možných učeben nejmenší ruch. Jelikož jsem chtěl mít alespoň nějaké srovnání s žáky jiného typu školy, stejný experiment jsem provedl i na žákovi 2. ročníku gymnázia Opatov a tento experiment probíhal u mě doma.

Žáci dostali vždy zadání vytištěné na papíru, na který měli poté i vypracovat řešení. První dva dostali stejnou úlohu. Jelikož mi přišlo, že ji řeší příliš dlouho a ztěžka, rozhodl jsem se vybrat třetímu úlohu jinou. Žák gymnázia vyřešil obě úlohy. Po celou dobu experimentu je snímala videokamera, já jsem stál stranou a snažil se do řešení zasahovat ve chvílích, kdy jsem měl pocit, že mají s postupem v úloze problémy. Žáky z obchodní akademie jmenuji nahodile vybranými jmény s počátečními písmeny z konce abecedy jako Žibřida, Zdeňku a Xavera. Z gymnázia je potom Vasil. Jejich řazení je v pilotní studii přesně takové, jak jsem je postupně natáčel.

Předtím, než žáci začali řešit příklad a než je začala snímat kamera, zeptal jsem se jich, zda souhlasí s tím, že budou natáčeni a že následující výzkum bude použit v mé diplomové práci. Dopředu věděli, že budou řešit slovní úlohu, která se řeší pomocí kvadratické rovnice a abych zvýšil jejich motivaci, měli slíbenou jedničku, jestliže se při řešení budou snažit.

Též jsem jim sdělil, že jim k řešení budu nápomocen a pokud nebudou vědět, aby mě zavolali a zeptali se na problematickou část. Toho ale v pilotní studii prakticky nevyužívali. Měl jsem pocit, že se cítí jako při testu, což do zřejmě do jisté míry zkresluje výsledky výzkumu. Pokud žák řešil úlohu déle než 40 minut, snažil jsem se řešení dovést do konce a to

„dovedením“ žáka před hotový konec některých etap řešení. Bylo to nutné vzhledem k tomu, že často museli jít na další hodinu a také (jak je z některých videonahrávek patrné) v tu dobu byla jejich pozornost již značně oslabena a často chtěli pouze skončit s řešením.

U každého žáka uvedu zvlášť krátký popis toho, co se na videonahrávce děje (tedy říká nebo co žák píše). Momentům, které jsou z mého pohledu zajímavější, se budu věnovat podrobněji. Po popisu bude následovat analýza vybraného žáka dle metody Newmanové. Jednak tabulka, kde je hodnocení jednotlivých etap, ale také podrobnější popis toho, jak úspěšně kterou etapou žák prošel.

Na konci pilotní studie budou všichni žáci seřazeni v tabulce a celkově bude uvedeno jejich srovnání a závěry, které jsem z pilotní studie vytvořil.

4.1.1.1 Žibřid

Žák je ve třetím ročníku střední školy. Jeho hlavním zájmem je hokej, v němž chytá v mládežnické reprezentaci. Přesto je jedním z těch, kteří mají ve třídě nejlepší známky a to nejen z matematiky. Při hodinách je bystrý a reaguje smysluplně na zadané otázky či úkoly. V pololetí měl z matematiky dvojku.

Popis

Žibřid řešil úlohu 1. Po prvních skoro šesti minutách, kdy řešil úlohu sám a vypadal „zaseklý“ jsem se šel podívat, jak na tom s řešením je a doptal se ho na zápis a užití neznámých (pro jednu informaci měl použity dvě neznámé). Z úvodu je však jasné, že pochopil, o co v úloze jde. Došlo tedy k porozumění danému problému.

Žák se na začátku snažil o algebraizaci problému, ale dařilo se mu vyjádřit zatím pouze jednu rovnici o jedné neznámé. S druhou jsem mu bohužel pomohl příliš, jak jsem si uvědomil při následném zhlédnutí videa. Měl jsem mu dát více prostoru pro vytvoření vlastní úvahy, pouze ho nasměrovat k tomu, aby provedl totéž jako u první rovnice. Poté rozebíráme sestavení rovnice o dvou neznámých. Později žákovi vytýkám, že chce ode mě zjistit, zda to má správně. V tu chvíli si není jist a obává se dál řešit. Přesto byl poté schopen sám říci, proč to má správně.

Je vidět, že v určování neznámých má problém. Posléze jsme došli k tomu, že nyní má dvě rovnice o dvou neznámých, které by měl vyřešit. Rovnice nejsou lineární. Pamatuje si řešení pomocí sčítací metody, s připomenutím dosazovací mu pomáhám. Provádí potom odečtení obou rovnic od sebe. Dochází k tomu, že má výsledek zřejmě špatně a obrací se na mě, abych mu pomohl najít chybu. Následně se spolu dostaneme k jedné rovnici o jedné neznámé, která je ale ve jmenovateli.

Dále rozebíráme, co dělat s rovnicí, která obsahuje zlomky. Opět se několikrát obrací ke mně, abych mu potvrdil správnost výpočtů. Po více než dvaceti minutách řešení jednoho příkladu je vidět, že je zřejmě trochu unavený a nejistý. Na konci dochází k řešení přes diskriminant. Ten mu počítám na kalkulačce a vychází iracionální číslo. Z toho plyne, že diskriminant není správný, nicméně uběhlo již téměř 40 minut od začátku řešení a on již potřeboval jít na hodinu. Proto mu dávám hypotetické dva výsledky, z nichž chci, aby mi učinil závěr. Ten činí správně.

Žibřid uvádí, že pro něj bylo obtížné nejprve vytvořit základní rovnici, kterou by potom mohl řešit. Druhý problém, který označuje, se týká odebrání neznámé z rovnice o 2 neznámých (myslí dvě rovnice o dvou neznámých) a jako třetí obtíž označuje problém se zlomky.

Celkově jsem se hned při řešení tohoto žáka poučil a dalšímu dal k dispozici kalkulačku. Odmocnina, která vychází, je poměrně velká a aniž jsem si to dopředu uvědomil, jedná se o místo, kde mají žáci problémy.

Analýza

Čtení

Žibřid neměl problém s matematickými výrazy v úloze. Je ovšem fakt, že použitá úloha byla v tomto ohledu velmi jednoduchá.

Porozumění

Úloze a zadání porozuměl bez problémů. Pro konkrétní čísla neměl problém určit vztahy mezi jednotlivými hodnotami, což je jasně patrné i z videonahrávky.

Transformace

V této etapě měl zásadní problémy. Samostatně nebyl schopen slovní úlohu transformovat do dvou rovnic. Problémů měl více. Jednak se správným určením neznámých, jednak s poskládáním těchto do rovnic. Poté, co jsme si řekli, jaké panují vztahy pro určité konkrétní hodnoty, byl již schopen jednu rovnici sestavit. Na sestavení druhé jsem mu bohužel nedal dostatek času.

PD – Vzorce

V úloze se vyskytuje jediný vzorec a to pro diskriminant. S tím neměl Žibřid problémy. Lehké obtíže nastaly při získání dvou rovnic o dvou neznámých, kdy nebyl schopen si sám v danou chvíli poradit.

PD – Výrazy

Na videonahrávce je jasně vidět, že s násobením tří členů si neumí poradit. Poté, co upravil $-5 \cdot (x + 16) \cdot x$ na $-5x + (-80)x$ jsme vedli tento rozhovor:

ČAS	EXPERIMENTÁTOR	ŽÁK	CO ŽÁK DĚLÁ	CO SE DĚJE
30:06	Víte, co mě ještě maličko mate? Tady se měly spolu násobit všechny.	Všechny?		
30:11	Mezi nima máte všude krát, ne?	Hm… takže tam bude víc čísel jako?		

Tab. 2 – Ukázka rozhovoru: Žibřid

PD – Znaménka

V této oblasti nedělal Žibřid chyby, přestože práce s nimi v úloze bylo dostatek.

Dekódování

Žibřid neměl problémy formulovat odpověď, když dostal dva výsledky, ihned si uvědomil, že jeden z nich není možný a ten vyloučil.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD- Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Žibřid	**A**	**A**	**C**	**B**	**B**	**A**	**A**

Tab. 3 - Žibřid

4.1.1.2 Zdeňka

Žákyně je také ve třetím ročníku a to ve stejné třídě. V matematice dosahuje podobných výsledků jako Žibřid. Má ale oproti němu „více naučeno a méně pochopeno", alespoň tak bych ji subjektivně hodnotil. Její hlavní denní náplní je golf, kterému se věnuje několik hodin denně a poměrně často kvůli němu ve škole chybí. V pololetí měla z matematiky také dvojku.

Popis

Řešení úlohy touto žákyní nebude tak podrobně popsáno. Především kvůli mému pocitu, že se zřejmě dostala jen málo za pochopení úlohy. Pro koncipování hlavního výzkumu byla významná především tím, že během velmi krátké doby (do dvou minut) dospěla ke správnému výsledku. Po rychlé kontrole jsem ale zjistil, že řešení nalezla pouze náhodou a to proto, že správný výsledek je 10 dní a ona si náhodou vydělila počet stran deseti, aby si úlohu zjednodušila.

Bylo potom už velmi těžké se vrátit zpět k řešení ve chvíli, kdy věděla správnou odpověď. Přesto jsem ji k tomu nutil. Má snaha nebyla ovšem příliš úspěšná. Řešení jsem ukončil asi po 37 minutách, kdy se žákyně dostala k výsledku, přesto si po zhlédnutí nejsem jist, zda pochopila, proč původní postup nebyl správný. Často jsou na videu slyšet narážky, jako: „Zase to mám špatně?“

Zdeňka uvádí jako největší problém sestavení rovnice a konkrétně poté vynásobení celé rovnice x (konkrétně hovoří o x_1, jelikož tak si neznámou označila). Jako další problém označuje pochopení a vybavení dosazovací metody při řešení soustav rovnic o více neznámých.

Analýza

Čtení

Zdeňka stejně jako Žibřid neměla s matematickými výrazy žádné problémy.

Porozumění

Měla problém porozumět základním vztahům v úloze, důkazem čehož je i zcela nesprávný postup (který bohužel vedl ke správnému výsledku). Přesto při řešení s asistencí již byla schopna vztahům porozumět.

Transformace

Při samostatném řešení zcela selhala při transformaci do rovnice, pravděpodobně ale vinou nedostatečného porozumění úloze. Při druhém řešení (po prvním samostatném a postupově nesprávném) ale byla transformaci schopna s větší pomocí zvládnout.

PD – Vzorce

Zdeňce dělalo problémy řešení dvou rovnic o dvou neznámých, dosazovací metoda pro ni byla velmi obtížná. Se vzorcem pro diskriminant problémy neměla.

PD – Výrazy

Problémové byly pro Zdeňku téměř všechny práce s výrazy. Jejich násobení i dělení jí dělalo velké problémy, přesto byla schopná se po mé intervenci většinou opravit.

PD – Znaménka

Se znaménky měla žákyně obtíže především při dosazování koeficientů z kvadratické rovnice do diskriminantu. Při úpravě rovnic se znaménky problémy neměla.

Dekódování

Při dekódování výsledků se zarazila nad záporným výsledkem (jako počtem stránek), v tu chvíli jsem ji lehce pobídl, aby si spočítala i druhý kořen. Pravděpodobně by to ale udělala po chvíli sama. Závěry potom učinila bez problémů.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Zdeňka	**A**	**C**	**C**	**B**	**C**	**B**	**A**

Tab. 4 - Zdeňka

4.1.1.3 Závěr po řešení Žibřida a Zdeňky

Při řešení úlohy 1 těmito dvěma žáky jsem dospěl k tomu, že řešení úlohy by nemělo být předvídatelné a výsledkem by ani neměly být čísla, která je možné přesně odhadnout. Pokud totiž žák uhodne řešení, je téměř nemožné přesvědčit ho, aby se k němu zkusil dostat korektní cestou, přestože by zkoumání podobného jevu mohlo být zajímavé, nebylo to cílem této práce.

Druhá věc, kterou jsem si uvědomil, byla, že úloha je zřejmě příliš komplikovaná a její řešení trvá dlouho a je pro žáky příliš náročné. Zkusil jsem proto třetímu žákovi dát úlohu 2. Samozřejmostí zůstalo, že jsem žákům již dával k dispozici kalkulačku.

4.1.1.4 Xaver

Xaver je žákem druhého ročníku, jako většina dalších ve škole se věnuje profesionálně sportu, konkrétně fotbalu. Chybí proto velmi často na podzim i na jaře a mezery ve znalostech nezvládá zcela zaplňovat samostudiem. Přesto patří k lepším žákův ve třídě, především pokud se jedná o úlohy, které vyžadují minimum naučených informací. Na slovní či logické úlohy je ale velmi dobrý. V pololetí měl jako poslední známku jedničku.

Popis

Dostal jako zadání úlohu 2. Úloze porozuměl bez problémů, jak vyplynulo i u odpovědí na položené otázky. Dále si rozumným způsobem určil neznámou jako hranu krychle (hranu ve smyslu počtu kostek). Správně sestavil i rovnici, díky níž je možné úlohu řešit. První problém nastal při úpravě této rovnice:

$$x^3 + 75 = (x + 1)^3 - 16$$

Po delší úvaze se rozhodl umocnit dvojčlen vpravo takto:

$$(x + 1)^3 = x^3 + 1$$

Ve výpočtu jsou i jiné chyby, ale ty patrně pramení z toho, že žák provedl více úprav najednou a u některých spletl znaménko. Po mých otázkách, co znamená „něco“ na třetí, posléze $(x + 1)^3$ došel k tomu, že je to špatně a rozhodl se řešení opravit, přesto nevěděl co s tím. I ve chvíli, kdy si napsal na levou stranu rovnice $x^3 - (x + 1)(x + 1)(x + 1)$, bylo potřeba, abych mu pomohl s dalším postupem. Zde by bylo zajímavé zjistit (což ale bohužel video nezachycuje), zda by si věděl rady, pokud by závorka byla na druhou, respektive násobily by se spolu pouze dvě.

Dále Xaver správně upravuje rovnici. Dalším místem, kde nastává problém, je diskriminant. Použije totiž vzorec nezávisle na pravé straně a diskriminant mu vyjde záporný (což je mu divné, ale není schopen odhalit, kde je chyba). Zde jsem ho naváděl sérií otázek k tomu, že není možné, aby na pravé straně rovnice bylo cokoliv jiného než 0. Přestože sám přišel na to, že diskriminant by neměl být záporný (respektive číslo pod druhou odmocninou), nedokázal by pravděpodobně sám odhalit, kde je chyba.

Dále už probíhal výpočet standardně a to až do samého závěru, kdy jsem od něj chtěl slyšet odpověď na otázku. Správně vyloučil záporný výsledek jako nemožný. Jako počet kostek ale uvedl nejprve 5. Tuto odpověď ale rychle opravil. Poté ale myslel, že kostek bude 5^3. Ptal jsem se ho několikrát na to, zda je to opravdu odpověď a naváděl ho, aby si znovu přečetl zadání. I po přečtení věřil, že se jedná o správnou odpověď a teprve po otázce: „Co by se stalo, kdyby měl 125 kostek?“, se zamyslel a dospěl ke správnému řešení. Celkově mu řešení úlohy trvalo 25 minut.

Ke svým obtížím napsal Xaver pouze, že se jednalo o látku, která se brala před dlouhou dobou (konkrétně před dvěma lety) a tudíž si nepamatuje přesný postup. V tomto ohledu mohu srovnat se čtvrtletním testem z té doby, kde se úlohou na kvadratické rovnice nezabýval. Pravdou ovšem je, že se v něm vyskytovalo úloh více a mohlo dojít k tomu, že ji nestihl.

Analýza

Čtení

V této etapě neměl problémy.

Porozumění

Při rozhovoru prokázal, že rozumí bez obtíží.

Transformace

Jak je patrné i z popisu, rovnici sestavil zcela správně.

PD – Vzorce

Xaverovi by se dala vytknout neznalost vzorce pro $(A+B)^3$. Ten zcela evidentně neznal. Protože ho však nechtěl použít a v úloze to nebylo potřeba, není neznalost v hodnocení zohledněna. Část řešení, ve které naopak při vzorci selhal, byla při řešení kvadratické rovnice pomocí diskriminantu. Zde nevěděl ani přes lehké upozornění, že rovnice musí být v základním tvaru, aby bylo možné vzorec použít.

PD – Výrazy

Xaver neměl problém se sčítáním ani odčítáním. Problém měl především s mocninou dvojčlenu a poté i s roznásobením tří stejných závorek obsahující tento dvojčlen.

PD – Znaménka

Se znaménky neměl při řešení úlohy obtíže.

Dekódování

Při dekódování zapomněl, že v úloze nejprve nějaké kostky zbyly a poté naopak přebývaly. Úvodní sdělení, že kostek bylo 5, opravil opravdu rychle a je velmi pravděpodobné, že by to jako písemný výsledek neuvedl. Celkově by ale samostatně úlohu správně pravděpodobně nevyřešil.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Xaver	**A**	**A**	**A**	**C**	**B**	**A**	**C**

Tab. 5 - Xaver

4.1.1.5 Vasil

Vasil je z jiné školy. Studuje v sextě osmiletého gymnázia Opatov. Matematika ho baví a má z ní většinou na vysvědčení jedničku. Do budoucna se jí chce alespoň částečně věnovat, neboť by rád po ukončení gymnázia studoval jadernou fyziku. V pololetí měl na vysvědčení jedničku.

Popis

Tento žák dostal obě úlohy a celkově je vyřešil za necelých 22 minut i s následným rozborem jeho obtíží nebo toho, kterou úlohu považuje za obtížnější. U úlohy 1 ji řešil prakticky bez zaváhání. Chvíli mu trvalo, než si správně určil neznámé a rovnici, ale poté již věnoval čas pouze řešení. Vzhledem k tomu, že úlohu po celou dobu řešil a to správně, nezasahoval jsem do procesu řešení žádnými otázkami. Při formulaci odpovědi ale zaměnil neznámé a místo počtu dní uvedl počet stránek za den. Proto uvedl chybnou odpověď. Tohoto jsem si ale nevšiml, a tudíž jsem na situaci nereagoval žádnou otázkou.

U druhé úlohy se na chvíli zarazil při užití vzorce pro diskriminant, kde mu nevycházelo celé číslo (což ale počet kostek musel být). Hledal proto chybu, kterou nalezl a opravil.

Vasil uvedl, že neměl problémy ani s jednou úlohou. Z obou úloh mu připadala obtížnější první.

Analýza úlohy 1

Čtení

V této etapě neměl problémy.

Porozumění

Při řešení úlohy jsem se ho neptal, jelikož po celou dobu pracoval. Přesto bylo z dalšího průběhu řešení zřejmé, že úloze porozuměl.

Transformace

Na videonahrávce správně sestavil obě rovnice.

PD – Vzorce

Bylo vidět, že v řešení rovnic je zběhlý a neměl v této etapě obtíže.

PD – Výrazy

Ani zde se neprojevily jakékoliv problémy.

PD – Znaménka

Se znaménky pracoval rychle a korektně.

Dekódování

Jediná problematická etapa. Jelikož jsem jeho chybu uvědomil až několik hodin po natočení videonahrávky, přišel jsem o možnost zjistit, zda by chybu v záměně neznámých odhalil hned při mém naznačení, nebo bychom spolu museli vést delší diskuzi na to téma. Přesto vzhledem k jeho preciznímu řešení této i následující úlohy lze předpokládat, že se skutečně jednalo spíše o chybu z nepozornosti a tedy by ji po upozornění odstranil. K této myšlence mě vede i rozhovor, který jsme spolu o úloze vedli ve chvíli, kdy jsem si chybu uvědomil.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Vasil 1	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**B**

Tab. 6 – Vasil 1

Analýza úlohy 2

Vasil neměl u této úlohy problémy v žádné etapě, řešení úlohy mu trvalo velmi krátce a k otázkám jsem se nedostal. Nemá proto zásadní význam popisovat jednotlivé etapy zvlášť.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Vasil 2	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**

Tab. 7 – Vasil 2

4.1.1.6 Závěr a metodologické důsledky

Řešení Žibřida a Zdeňky bylo z mého pohledu časově příliš náročné a oba byli takto dlouhým řešením zřejmě unaveni. Úloha 1 také obsahuje poměrně velké množství kroků a postupů, které je potřeba zvládnout a použít a i samotné řešení přes dvě nelineární rovnice o dvou neznámých je pro žáky pravděpodobně velmi obtížné. Z těchto důvodů jsem se rozhodl úlohu do studie nezařadit.

Úloha 2 vycházela časově výrazně lépe a popravdě i její pochopení a uchopení oběma žáky bylo bezproblémové. Problém tvoří třetí mocnina neznámé, která se v úloze při řešení vyskytuje. Ačkoliv není ve výsledné rovnici obsažena, protože se třetí mocniny odečtou, umocnění $(x+1)^3$ dělalo Vasilovi velké obtíže a ubíralo čas i pozornost při řešení kvadratické rovnice, které je předmětem zkoumání této práce. Z tohoto důvodu jsem se rozhodl zařadit odlišnou úlohu, kde matematizace problému bude srovnatelně obtížná, ale postup nepovede ani přes dvě rovnice o dvou neznámých ani přes třetí mocninu, která se odečte. Uvědomil jsem si také, že oba žáci patří v matematice spíše k těm lepším a tedy by další žáci měli pravděpodobně daleko větší obtíže v řešení, což by neúměrně prodlužovalo i čas při řešení úlohy.

Další z věcí, které jsem si ujasnil, bylo, že by řešitel měl mít k dispozici kalkulačku, jelikož úloha plánovaně neměla vycházet příliš jednoduše (malé celé číslo). Po zhlédnutí videozáznamu jsem se také rozhodl dávat si větší pozor na čas, který žákům věnuji k samostatné úvaze (bylo ho na začátku příliš mnoho) a také, se budu více věnovat tomu, abych jim neradil více, než je v dané chvíli nutné (což se projevilo především v experimentu se Žibřidem). Vzhledem ke Xaverovu nesprávnému řešení a mému nezpozorování chybné odpovědi jsem se rozhodl ve vlastním výzkumu klást větší důraz na kontrolu odpovědi žáků.

4.1.2 Analýza všech žáků v pilotní studii

Srovnání žáků zde nemá takovou významovou hodnotu především s ohledem na různé použité slovní úlohy a také, že jsem při natáčení videonahrávek v pilotní studii teprve zkoušel, jak se ptát, jak na žáky reagovat a co jim říkat.

Žáci	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Zdeňka	**A**	**C**	**C**	**B**	**C**	**B**	**A**
Žibřid	**A**	**A**	**C**	**B**	**B**	**A**	**A**
Xaver	**A**	**A**	**A**	**C**	**B**	**A**	**C**
Vasil 1	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**B**
Vasil 2	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**

Tab. 8 - Srovnání žáků (žlutě žáci PB – VOŠ a SŠ Managementu, modře žák gymnázia)

Přes výše zmíněné z tabulky vyplývá, že žáci u těchto úloh neměli obtíže s etapou čtení, tedy především s porozuměním použitých slovních obratů a matematického jazyka v úlohách. Dalo by se také usuzovat, že druhá úloha byla snazší, než první, jelikož podíváme-li se na výsledné hodnoty u Vasila 2 a Xavera, vypadají lépe, než u Zdeňky, Žibřida a Vasila 1. Vzorek žáků je ale příliš malý a také jak Vasil, tak Xaver patří na svých školách k těm, kteří mají z matematiky nejlepší známky, a tedy pravděpodobně budou úlohy řešit snáze. Kromě etapy čtení se tedy nedá učinit z těchto výsledků žádný závěr.

4.2 Hlavní výzkum

Popis úlohy, kterou jsem vybral pro vlastní výzkum je v kapitole 4.7. V této kapitole je popsán mimo jiné průběh hledání takové úlohy, která by tomuto výzkumu dle mého názoru nejlépe vyhovovala. Jednotlivé žáky budu označovat náhodně zvolenými jmény s počátečními písmeny řazenými od začátku abecedy. Konkrétně žáci z obchodní akademie jsou po řadě označeni Arnošt, Bernard, Cecil, Dušan a Eda. Žáci z gymnázia jsou po řadě označeni Ferenc, Gábina, Hubert, Chrudoš, Igor a Jonáš.

Žáci jsou řazeni náhodně, neboť u všech probíhal experiment stejným způsobem a v průběhu se neměnil. Není tedy podstatné, kdo byl skutečně v jakém pořadí natočen. Nejprve jsou uvedeni žáci školy PB – VOŠ a SŠ managementu a poté žáci Gymnázia Opatov. Po uvedení všech žáků dané školy bude následovat celkové zhodnocení a přehledová tabulka žáků dané školy řazená dle celkové úspěšnosti ve všech etapách. Konkrétní řazení žáků dle úspěšnosti je vysvětleno u celkové tabulky v kapitole 4.3.

Stejně jako v pilotní studii byli žáci seznámeni s průběhem výzkumu a jeho využitím. Dopředu věděli, že budou mít za úkol vyřešit slovní úlohu vedoucí na kvadratickou rovnici. Věděli také, že o úspěšnosti jejich řešení bude informován vyučující, který jim na základě této úspěšnosti udělí méně nebo více významnou jedničku.

4.2.1 PB – VOŠ a SŠ managementu

Bližší informace o této škole se v této práci nacházejí v kapitole 4.4.

4.2.1.1 Arnošt

Arnošt patří do třetího ročníku. Jeho hlavní zálibou je hraní hokeje za dorost. Dříve navštěvoval gymnázium a na současnou školu přešel, jelikož nezvládal hokej a zároveň požadavky na studium na gymnáziu. Patří ve třídě k nejlepším a poměrně dobře se s ním na hodinách pracuje. Je komunikativní a reaguje, pravdou je, že má docela značné mezery v různých oblastech matematiky. Na posledním vysvědčení měl z matematiky za 3.

Popis

Celkově úlohu řešil necelých 37 minut včetně krátké asi minutu trvající konverzace, kde jsem mu kladl otázky na problémy a řešení úlohy obecně.

Ihned na začátku si Arnošt udělal náčrtek záhonu jako obdélníku a uvedl i rozměry jednotlivých stran. Cestičky do náčrtu nijak nezahrnul. Po krátkém uvažování se zeptal, jak se počítá obsah obdélníku. Chvíli jsme řešili, jak ke vzorci dojít a po delším rozhovoru jsme ke vzorci společně dospěli. Následně samostatně spočítal obsah daného obdélníku.

Jelikož dále sám nepokračoval, zeptal jsem se ho, zda úloze rozumí a chápe, co se po něm chce. Sám řekl, že se po něm chce spočítat šířka cestiček. Na mou otázku, zda si je tam vyznačil, mi odpověděl, že ještě ne (a poté je načrtl do obrázku). Poté si spočítal novou plochu záhonu (tzn. bez cestiček). Navedl jsem ho na to, že by bylo dobré si vyznačit do obrázku šířku cestiček. Řekl, že cestička je vlastně obdélník.

Ve chvíli, kdy sestavoval vztahy pro obsahy obou cestiček, se do úlohy hodně zamotal, jak i sám prohlásil. Vyptal jsem se ho poté na rekapitulaci celé situace a následně po několika minutách sestavil rovnici. V ní mu chyběl obsah místa, kde se cestičky překrývají, na což jsem ho upozornil (lineární rovnici jsem ho řešit nenechal). Dále se u Arnošta objevil problém s vyjádřením obsahu čtverečku, kde se cestičky překrývají. Opět několik minut trvalo, než při rozhovoru se mnou dospěl k vyjádření obsahu a za chvíli i k tomu, kde se ten obsah čtverečku objeví v rovnici, kterou sestavoval.

Následně získal kvadratickou rovnici, avšak neznal vzorec pro diskriminant. Ten jsem mu musel nadiktovat, stejně jako vzorec pro výpočet kořenů. Uvědomil si sice, že při výpočtu kořenů musí mít na pravé straně nulu, přesto se mně na to ještě přeptal. Při úpravě kvadratické rovnice upravil výraz $8{,}5a - 6$ na levé straně takto:

$$8{,}5a - 6 = 2{,}5a$$

Další práce s výrazy už mu nečinila obtíže. Při výpočtu kořenů udělal dvě chyby ve znaménkách. Upozornil jsem ho proto, aby si výpočet zkontroloval. Sám pak odhalil, kde se chyby nacházejí. V této chvíli už na úloze pracoval 30 minut a bylo na něm vidět, že je dlouhým řešením unaven. Nějakou dobu nemohl přijít na znaménko minus, které bylo před 15,4 ve vzorci pro výpočet kořenů:

$$x_1 = \frac{-15{,}4 + 14{,}6}{-2} = \frac{-0{,}8}{-2}$$

Zásadní chvíle přišla při hodnocení výrazu $\frac{-0{,}8}{-2}$, jelikož nepovažoval za možné, aby se v čitateli objevilo 0,8. Výpočet druhého kořene proběhl již bez obtíží.

Na závěr chtěl formulovat odpověď. Nejprve řekl, že šířka cestičky bude 15 metrů, což si ale hned po hlasitém vyřčení uvědomil, že je nesmysl. Hledal potom, co to vlastně vypočítal, a dospěl k závěru, že výsledkem je 15 dm. Toto by zřejmě byla jeho odpověď. Až po upozornění na skutečnost, že vše počítal v metrech a výsledek mu vyšel v decimetrech, se zamyslel i nad druhým kořenem a označil za správnou odpověď 0,4 m a výsledek 15 m jako nereálný vzhledem k rozměrům pozemku.

Analýza

Čtení

V úloze se nevyskytly pojmy, kterým by nerozuměl.

Porozumění

Při rozhovoru mi dokázal vysvětlit, co se po něm v úloze žádá a bylo z toho patrné, že je mu to jasné. Na druhou stranu obsahoval jeho náčrt pouze celý záhon jako obdélník, nikoliv i požadované cestičky a natož jejich šířku a nebyl proto poté schopen samostatně pokračovat. Samostatně by ke správnému náčrtu pravděpodobně nedospěl.

Transformace

Po vyjádření obsahů obou cestiček pomocí neznámé měl ještě obtíže s místem, kde se překrývají. Jeden z problémů byl, jak ho vyjádřit, druhý jak ho poté zahrnout do rovnice.

PD – Vzorce

Jak je z nahrávky patrné, Arnošt nemá vzorec pro obsah obdélníku nebo čtverce ukotven. Vzorec pro získání kořenů kvadratické rovnice z diskriminantu si nepamatuje, ale je schopen ho použít.

PD – Výrazy

Při sčítání a odčítání výrazů si nebyl příliš jist, nicméně po upozornění dokázal chyby odstranit.

PD – Znaménka

Chyby ve znaménkách se objevovaly, ale jak je zmíněno i v popisu jeho řešení, jedná se pravděpodobně spíše o chyby z nepozornosti, než o chyby systematické a po lehkém upozornění byl Arnošt schopen tyto chyby nalézt a opravit.

Dekódování

Pokud by úlohu řešil samostatně a dospěl až do této etapy, nedokázal by správně odpovědět. Nejprve vůbec neodhalil, že není možné provádět výpočty v jedné jednotce (metry) tak, aby výsledek vyšel v jiné (decimetry). Správný výsledek nebral v úvahu do chvíle, než jsem ho upozornil, že i v čitateli zlomku se může objevit desetinné číslo.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Arnošt	**A**	**C**	**C**	**C**	**B**	**B**	**C**

Tab. 9 - Arnošt

4.2.1.2 Bernard

Tento žák je ze 4. ročníku a je v matematice jeden z nejlepších na celé škole. Věnuje se ale velmi aktivně golfu, a proto často třeba dva měsíce v kuse chybí. Kromě toho řídí i vlastní firmu. To jsou důvody, proč v matematice (ale i jiných předmětech) má občas mezery, které nejsou zcela zaplněny jeho samostudiem. V pololetí měl z matematiky za 1.

Popis

Úlohu řešil celkově necelých 20 minut.

Po přečtení úlohy vytvořil náčrt, kde má obdélník s uvedenými délkami stran, šířku cestiček si označil x. Poté prakticky naráz sestavuje správnou kvadratickou rovnici, na níž několik minut hledí, ale neřeší ji. Ptal jsem se Bernarda na vysvětlení dané rovnice (jak k ní došel). Vysvětlil mi, že abychom dostali 6 m^2, musí se sečíst obsahy obou cestiček a poté odečíst tu část, kterou počítáme dvakrát, tedy čtvereček kde se cestičky překrývají.

Vzorec pro kořeny přes diskriminant vůbec neznal (nepamatoval si), proto jsem mu ho napsal. Po několika minutách se v řešení nikam neposunul. Pamatoval si, že kvadratická rovnice musí být v nějakém tvaru, ale nebyl si jist v jakém. Abych ověřil, zda si základní tvar kvadratické rovnice nepamatuje vůbec, nebo ho zná alespoň částečně, napsal jsem mu jen ax^2 a on už si vzpomněl a rovnici do základního tvaru upravil. Do vzorce pro diskriminant dosadil správně, chybu neudělal ani ve znaménkách. Při úpravě kořenů chtěl provést tuto úpravu:

$$x_{1,2} = \frac{-15{,}4 \pm 14{,}6}{-2} = \frac{15{,}4 \pm 14{,}6}{2}$$

Ptal jsem se ho proto, jestli to lze takto upravit a popřípadě jaké z toho plynou důsledky. Po upozornění na $\pm$ řekl, že by to mohl dělat jen, kdyby čitatel byl ve tvaru násobení, a že udělal chybu. Poté nechal oba minusy a zbavil se jich až po sečtení (resp. odečtení) čísel v čitateli zlomku. Tuto úpravu jsem za chybnou nebral, přestože jsem přesvědčen, že si neuvědomoval, že mu vyjdou stejné kořeny, jen v jiném pořadí.

Při odpovědi okamžitě vyloučil výsledek neodpovídající realitě a odpověděl správně.

Analýza

Čtení

Přestože jsem se ho na konkrétní pojmy neptal, bylo z jeho postupu jasné, že neměl žádné problémy s textem úlohy.

Porozumění

Náčrt provedl správně a rovnou do něj vyznačil neznámou. V této etapě u Bernarda nenastal problém.

Transformace

Rovnici správně sestavil prakticky okamžitě poté, co si načrtl obrázek.

PD – Vzorce

Bernard nezná zpaměti vzorec pro kořeny kvadratické rovnice přes diskriminant. Jakmile ho ovšem obdržel, nebyl již problém kvadratickou rovnici vyřešit.

PD – Výrazy

Práce s výrazy mu nečinila obtíže, lehké zakolísání nastalo pouze při úpravě na základní tvar kvadratické rovnice.

PD – Znaménka

Znaménka pečlivě hlídal tak, aby v nich neudělal chybu. Zeptal se v jednu chvíli na úpravu, kterou si nebyl jist (viz. popis). Nicméně si poté dokázal poradit i přesto, že na svou původní otázku nenalezl odpověď.

Dekódování

Po vyloučení nevyhovujícího kořene uvedl správnou odpověď.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Bernard	**A**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**A**

Tab. 10 - Bernard

4.2.1.3 Cecil

Cecil navštěvuje školu jako žák druhého ročníku. Látku, které se výzkum věnuje, tedy probíral v letošním školním roce (na přelomu listopadu a prosince). Je jedním z těch, kteří se neangažují v mládežnickém sportu. V pololetí měl z matematiky dvojku.

Popis

Zpočátku se zdálo, že mu řešení půjde rychle, ale nakonec nad úlohou strávil okolo 40 minut.

Jakmile úlohu přečetl, zapsal si hlavní údaje a po chvíli se zeptal, zda nejdříve musí vypočítat obsah záhonu. Zeptal jsem se proto, jestli rozumí zadání a mohl by ho přeformulovat, což udělal a nad papírem přejel propiskou, jako by kreslil cestičky. Domluvili jsme se poté, že by bylo lepší náčrtek skutečně načrtnout. Následně vyjádřil celkovou plochu záhonu a zeptal se, zda jsou cestičky stejně široké. Téměř okamžitě si ale na tuto otázku sám odpověděl.

Po chvíli sečetl obě strany obdélníku a na mou otázku, proč je sečetl, nedokázal odpovědět. Navrhl jsem mu proto, aby zkusil něco jiného. Na náčrtku neměl nikde uvedenou neznámou šířku, a jelikož viditelně tápal, zmínil jsem, že obvykle bývá zvykem si do náčrtu uvádět a nějak označit i to, co neznáme a chceme zjistit. Po této intervenci si neznámou na správné místo obrázku umístil.

Protože stále viditelně nevěděl kam dál, zkusil jsem ho nasměrovat k tomu, aby si představil jednu cestičku samostatně a vyjádřil vzhledem k náčrtu obsah této cestičky. Uvedl, že cestička tvoří obdélník, kde jedna jeho strana je 8,5 m (resp. 6,9 m u druhé cestičky) a šířka je x m. Začal psát rovnici, kde na levou stranu uvedl obsah záhonu bez cest, tedy 52,68 m^2. V tu chvíli potřeboval pomoci s vyjádřením svého myšlenkového pochodu. Pouze jsem ho totiž navedl k tomu, aby si zapsal alespoň nějakou rovnici a pak sledoval, zda je to pravda a on bez mého dalšího přičinění napsal:

$$52{,}68 = 58{,}68 - 8{,}5x + 6{,}9x$$

Po mé otázce, proč přičítáme $6{,}9x$, doplnil Cecil závorku (kterou si pouze myslel) na tento tvar:

$$52{,}68 = 58{,}68 - (8{,}5x + 6{,}9x)$$

Upozornil jsem ho na to, že takto rovnice není kompletní a on hned věděl, že problém bude ve čtverečku, kde se cestičky kříží a my ho odečítáme vlastně dvakrát. V tu chvíli bylo ode mne určitě chybou se ho takto přímo ptát. Odpověděl totiž ihned, z čehož plyne, že jsem mu prozradil informaci, kterou měl již nějakým způsobem rozmyšlenou. Správně usoudil, že se jedná o čtverec, ale chvíli mu trvalo určení jeho obsahu a poté doplněním této informace do rovnice. Úprava rovnice již pro Cecila nebyla problematická.

Vzorec pro diskriminant napsal bez problémů, ale neuvědomoval si, že by měl upravit kvadratickou rovnici do základního tvaru, aby ze vzorce dostal kořeny. Při úpravě rovnice kvadratické rovnice měl problémy s určením znamének a odečtením čísel. Na konci svého řešení dostal oba kořeny kvadratické rovnice. Správnou odpověď z kořenů byl schopen sestavit samostatně.

Analýza

Čtení

V úloze se nevyskytovaly pojmy, které by Cecilovi dělaly problémy.

Porozumění

Cecil si načrtl pouze obdélník a cestičky, neznámou si do něj nevyznačil. Úloze jinak ale rozuměl a chápal, co se po něm chce.

Transformace

S touto etapou měl na začátku velké problémy. Vypadalo to, že rovnici sestavuje spíše na základě náhody. Kontrastuje s tím, že když dostal radu dát na jednu stranu rovnice plochu záhonu a vyjádřit druhou pomocí neznámé, poměrně rychle si tím poradil. Pak se objevily ještě trochu problémy s určením obsahu objektu, kde se cesty protínají.

PD – Vzorce

Znal zpaměti vzorec pro diskriminant, ale nevzal v úvahu, že k němu potřebuje základní tvar kvadratické rovnice.

PD – Výrazy

S úpravou rovnice do základního tvaru měl Cecil obtíže, stačilo ovšem zlehka na chyby upozornit.

PD – Znaménka

Ve znaménkách nedělal chyby.

Dekódování

Z obou vypočítaných kořenů vybral ten správný, ten neodpovídající realitě vyloučil a vytvořil správnou odpověď na zadanou otázku.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Cecil	**A**	**A**	**B**	**B**	**B**	**A**	**A**

Tab. 11 - Cecil

4.2.1.4 Dušan

Jedním ze sportovců na škole je i Dušan. Věnuje se závodně hokeji v dorostenecké kategorii. Ve škole je v druhém ročníku a v té třídě patří spíše k podprůměrným žákům, pokud jde o prospěch i schopnost řešit v hodině složitější matematické problémy. V pololetí dostal z matematiky za 4.

Popis

Úloha mu trvala necelých 40 minut, ovšem s tím, že ji nedořešil a řešení jsem po té době ukončil, jelikož už se na něj viditelně příliš nesoustředil.

Už od počátku řešení úlohy byl hodně nervózní. Sám ví, že v matematice je spíše slabší a bylo třeba ho k účasti před kamerou dost přemlouvat. Ihned během krátké chvíle od zapnutí videokamery do náčrtu zapsal opačně délky stran (k delší napsal menší hodnotu a ke kratší větší) a pak také rozdělil obdélník rovnoběžnými cestičkami na tři menší, nikoliv na čtyři. Sám se ale po chvilce opravil. Cestičky si nejprve načrtl pouze jako úsečky. Vzhledem k tomu, že se tvářil bezradně a chtěl poradit, chtěl jsem po něm nejprve přetlumočit zadání vlastními slovy, abych viděl, zda mu porozuměl a také aby si třeba uvědomil, jak se posunout dále.

V náčrtu si Dušan vzhled cestiček změnil z úsečky na obdélníky (poté, co jsem mu to poradil) a po chvíli jsme společně dospěli k označení šířky cestičky v daném obrázku. Nejprve se rozhodl spočítat obsah celého obdélníku (záhonu). Vzorec pro obsah obdélníku pro něj představoval problém. Moc mu nepomohlo, ani když se dozvěděl, že vynásobí jednu stranu a druhou. Navrhoval, že to bude:

$$S = a^2 \cdot b^2$$

Uvedený vzorec naznačuje, že si ho Dušan částečně pamatuje, ale nemá jasnou představu, co obsah obdélníku reálně představuje (je možné že druhé mocniny se mu tam dostaly ze vzorce pro obsah čtverce). Při pokračování ve výpočtech zjistil zbylý obsah záhonu, když odečetl obsah plochy zastavěné cestičkami. Vůbec pak netušil, co se získanou hodnotou dělat. Poradil jsem mu proto, aby si vytáhl cestičky mimo náčrtek, aby zjistil jak zapsat jejich obsah. Během celého řešení úlohy často říkal, že neví a čekal, co mu poradím. I přesto, že jsem mu pak poradil, určitě měl problémy pochopit, co s tím dělat (například cestičky si na mou radu načrtl mimo hlavní obrázek, ale poté stejně nevěděl co s tím).

Dušanův hlas se zcela změnil ve chvíli, kdy jsme v řeči došli k tvaru objektu, ve kterém se cestičky překrývají. Nadšeně nahlas řekl, že se jedná o čtverec a viditelně byl rád, že na to přišel samostatně. V kontrastu s tím je ale zbylý průběh sestavování rovnice.

Ukázka naší konverzace pro dokreslení:

ČAS	EXPERIMENTÁTOR	ŽÁK	CO ŽÁK DĚLÁ	CO SE DĚJE
25:21	Ono je to opravdu… já bych vám do toho nerad mluvil v tomhle smyslu, co budete nebo nebudete potřebovat. Ono to totiž není ani jednoznačné.	Padesát osm	Píše: $S = 858{,}65 \cdot 15{,}4 = x^2$	
26:04	A můžete mi vysvětlit, proč je spolu násobíte ty dvě hodnoty?	Měl bych je dělit?		
26:11	Nejdřív by bylo fajn si uvědomit, co to je. Co je to první?	První je obsah celýho toho bez cestiček.		
26:16	Bez cestiček. Tak dobrý a násobíte ho?	Násobim ho těma cestičkama.		
26:26	A to dává? Logicky smysl jaký?	To dává…		
26:29	Násobíme spolu dva obsahy…	Dělit bych to měl! Nebo minus?		
26:33	Co dostaneme, když spolu budeme dělit dva obsahy? Co vy vlastně děláte? Tady opravdu se bavíme o úplně reálný situaci. To si přece umíte představit, že máte nějaký pozemek a dělíte ho na cestičky.	No.		

Tab. 12 - Ukázka rozhovoru: Dušan 1

Ve 34. minutě nahrávky jsem usoudil, že správnou rovnici zřejmě nesestavíme a nadiktoval jsem mu rovnici správnou a rozebírali jsme spolu alespoň, co znamenají výrazy, které se v dané rovnici vyskytují. Zde Dušan pravděpodobně chápal, o čem se bavíme. Při řešení mnou napsané kvadratické rovnice si ale nevěděl rady. V tu chvíli už vypadal (a i z hlasu na nahrávce je to patrné) zcela rezignovaně. Dále jsme spolu proto nerozebírali řešení kvadratické rovnice, ale přešli jsme rovnou ke kořenům kvadratické rovnice. Z tohoto rozboru je následující ukázka:

ČAS	EXPERIMENTÁTOR	ŽÁK	CO ŽÁK DĚLÁ	CO SE DĚJE
37:25	Dobře. Tak já už bych vás nerad jako trápil víc, ale jednu věc bych přece jenom rád věděl. Na konci vám vyjde x jedna se rovná 15, x dva se rovná 0,4, jo? Tyhlety dva výsledky, na konci byste se k tomu dostal, kdybyste to uměl vyřešit. Já bych jenom chtěl, tyhlety dva výsledky, kdybyste mi uměl vysvětlit, jaký bude řešení tý úlohy. Jestli byste se zamyslel nad tím. Vyjde vám x jedna se rovná 15, x dva se rovná 0,4. Co byste s tím jako dál dělal?	Tak 15 bude ta šířka cestiček.		
38:20	15 bude šířka cestiček? 15 čeho?	Ne ta bude 15 metrů.		
38:25	15 metrů?	Ne to je kravina.		
38:27	Proč?	To je moc.		

Tab. 13 - Ukázka rozhovoru: Dušan 2

Z kořenů nakonec vybral správný, ale i v tomto místě byly v jeho hlase patrné pochyby. Řešení úlohy již z mého pohledu nemělo smysl natahovat, Dušan už vypadal vyčerpaně a rezignovaně a v tomto stavu by další odpovědi na mé otázky byly pravděpodobně nesmyslné.

Analýza

Čtení

Jediná etapa, kde neměl problémy.

Porozumění

Dušan si udělal v náčrtu cestičky jako úsečky, což mu na počátku činilo obtíže. Problémy měl s porozuměním pojmu obsahu, což se projevilo i v ukázce našeho rozhovoru, kde hádá co s obsahy cestiček udělat, mohl je stejně pravděpodobně násobit, dělit, odčítat či sčítat.

Transformace

Z videonahrávky je zcela jasně patrné, že by Dušan nebyl schopen rovnici sestavit a dost možná ani takovou, která by sice nebyla správná, nicméně by alespoň částečně o úloze vypovídala (např. jako v jiných případech, kdy žáci sestavili lineární rovnici, která sice nebyla správná, nicméně za ní byla vidět rozumná úvaha). I poté, co jsem mu rovnici nadiktoval, myslím, že by ji v obdobné úloze samostatně nesestavil.

PD – Vzorce

Dušan měl při řešení problémy se vzorci pro obsah obdélníku, vzorcem pro diskriminant. Vzhledem k tomu, že měl problémy i s pojmem obsahu (tzn., co to znamená), nedala se znalost vzorce příliš předpokládat.

PD – Výrazy

Úprava kvadratické rovnice do základního tvaru se jevila jako problematická. Stejně tak sčítání výrazů. Žák ani se značnou pomocí nedokázal kvadratickou rovnici upravit do základního tvaru.

PD – Znaménka

Ve znaméncích chyby nedělal, ale bylo to způsobeno i tím, že se k algebraickým operacím při řešení vůbec nedostal.

Dekódování

Po zadání správných kořenů vybral s pochybnostmi v hlase ten správný. Dle otázek, které dostal, nepředpokládám, že by šlo pouze o náhodu. V této etapě tedy uspěl.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Dušan	**A**	**C**	**D**	**D**	**D**	**N**	**B**

Tab. 14 - Dušan

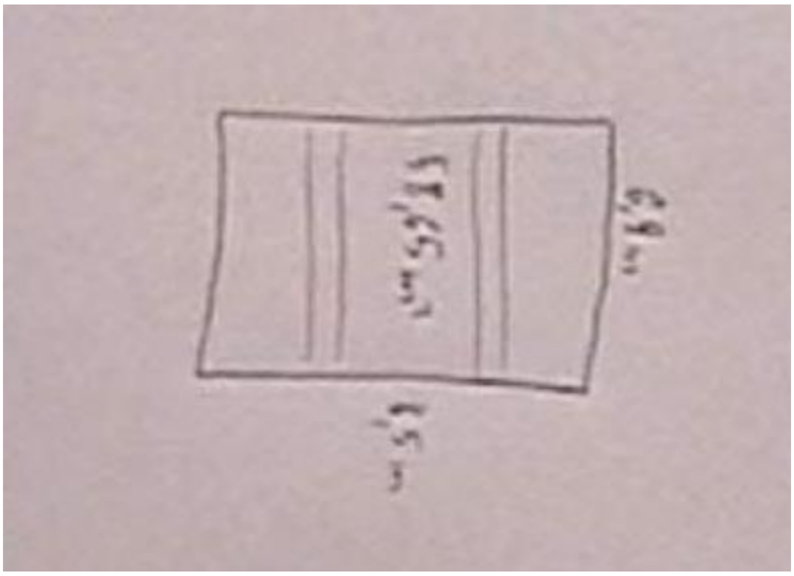
4.2.1.5 Eda

Eda patří k průměrným žákům třetího ročníku na škole. Stejně jako řada dalších se závodně věnuje hokeji. V budoucnu plánuje jako jeden z mála dále studovat na vysoké škole. V pololetí měl na vysvědčení trojku z matematiky.

Popis

Řešení úlohy mu zabralo okolo 40 minut.

Nejprve si nakreslil náčrt a v něm dvě cesty (viz. obrázek) a spočítal celkový obsah obdélníku. Po mém upozornění na část textu, kde je popis toho, že cestičky dělí pozemek na čtyři obdélníky, udělal náčrt správně. Poté několik minut nad novým náčrtem tápal. Jelikož viditelně nevěděl co dál, zeptal jsem se ho na šířku cestiček, a kde by to mohlo být uvedeno v jeho obrázku. Uvedl si do obrázku x jako šířku cestiček, ale jelikož se stále moc neposunul, poradil jsem mu vytáhnout si cestičku mimo náčrt, což udělal.



Obr. 4 – Eda: chybný náčrt situace

I Když měl Eda cestičku vytaženou mimo jako obdélník o stranách s délkami 8,5 m a x m, obsah tohoto obdélníku mu dělalo problémy určit. Ptal jsem se ho proto na obsahy konkrétních obdélníků (náhodně zvolených) a jak by je určil a poté na to, když je jeden rozměr x m. V tu chvíli už určil obsah správně.

V následujících dvou minutách pracoval samostatně a pak mě zavolal, že už má sestavenou rovnici, měl v ní uvedeny dvě neznámé x a y, přičemž jsme se ale po chvíli dostali k tomu, že obě neznámé označují tutéž šířku. Dále jsme rozebírali, že se plochy obou cestiček nebudou rovnat, naopak že dohromady se rovnají 6 m^2. Ještě jsme poté rozebírali čtvereček, kde se cesty protínají a který se v jím sestavené rovnici přičítá dvakrát. Ve výsledku by rovnici ale asi sám nesestavil.

Jelikož říkal, že s úpravou kvadratické rovnice si poradí, nechal jsem ho pracovat samostatně, při úpravě k oběma stranám přičítal x^2 místo odečítání. Pravděpodobně se ale jednalo pouze o chybu z nepozornosti. Striktně také dodržoval zápis $8{,}5 \cdot x$, místo aby si to upravil na obvyklé $8{,}5x$, je možné, že nevěděl, že obojí značí totéž, to ale z videa není zcela patrné. Tuto možnost podporuje, že sčítal x zvlášť a to takto:

$$8{,}5 \cdot x + 6{,}9 \cdot x = 2x + 16{,}4$$

Vzorec pro diskriminant si nepamatoval zpaměti, proto jsem mu ho nadiktoval, nevěděl ale ani, jak s ním poté zacházet, tzn. kde získat koeficienty pro doplnění. Dosazení zvládl bez obtíží a správně spočítal diskriminant. Napsal si dva výsledky, ale poté řekl, že si pamatuje, že se to někdy rozděluje na dvě řešení (která tam ale měl napsaná, resp. pouze čitatele zlomku ve vzorci pro kořeny). Upozornil jsem ho na to, že si tam dva výsledky napsal a pak s nimi nepokračoval. Tuto situaci nedovedu rozumně zhodnotit, žák nevypadal nervózní, asi byl trochu unavený, ale i tak oba výsledky napsal malou chvíli předtím, než se zeptal.

Při určování odpovědi na otázku v úloze se zarazil, že mu vyšly dva kořeny. Nevěděl poté co s nimi, zvažoval jejich dosazení do rovnice, popřípadě s nimi ještě nějak dále počítat. Jelikož jsme se úlohou zabývali již přes 40 minut, požádal jsem ho, aby ze získaných výsledků učinil nějaký závěr s tím, že na to má málo času. Určil, že to bude 0,4 m, jelikož 15 m je nesmysl. Lze tedy předpokládat, že správnou odpověď již předtím tušil, ale možná z obavy udělat chybu ji nevyřkl.

Analýza

Čtení

V této etapě jsem nepozoroval obtíže.

Porozumění

Nejprve si náčrt nakreslil špatně. Zřejmě by na to později sám přišel, ale dost možná po delší době chybného řešení. Zadání úlohy ale rozuměl bez problémů.

Transformace

Eda měl se sestavením rovnice vážné problémy. Značnou část jsme sestavili dohromady, po velmi návodných otázkách. Samostatně by na celou rovnici nepřišel. Rady se mu dostalo i u křížení těch cest a plochy toho čtverce, který patří do obou.

PD – Vzorce

Vzorec pro diskriminant si nepamatoval a také ho neuměl použít, nejprve jsem mu musel nadiktovat obecný tvar kvadratické rovnice, kde měl jednotlivé koeficienty vyznačené.

PD – Výrazy

Problémy měl především při sčítání výrazů. Jak je zmíněno v popisu, $8{,}5 \cdot x$ a $8{,}5x$ pro něj asi neznamenalo totéž a neznámou tam poté sčítal samostatně, jakoby nemělo násobení přednost. Úprava kvadratické rovnice do základního tvaru byla proto problematická.

PD – Znaménka

V této podetapě Eda neměl problémy.

Dekódování

Odpověď nevytvořil příliš rychle a zřejmě v první chvíli vůbec nevěděl, jak ji získat (co s kořeny, které mu vyšly). Po chvíli si ale pravděpodobně utřídil myšlenky a odpověděl správně i s odůvodněním, proč tomu tak je.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Eda	**A**	**B**	**C**	**C**	**C**	**A**	**B**

Tab. 15 - Eda

4.2.1.6 *Shrnutí PB –VOŠ a SŠ managementu*

Žáci	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování	Známka	Čas
Bernard	**A**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**A**	**1**	**18:45**
Cecil	**A**	**A**	**B**	**B**	**B**	**A**	**A**	**2**	**42:01**
Eda	**A**	**B**	**C**	**C**	**C**	**A**	**B**	**3**	**43:36**
Arnošt	**A**	**C**	**C**	**C**	**B**	**B**	**C**	**3**	**35:30**
Dušan	**A**	**C**	**D**	**D**	**D**	**N**	**B**	**4**	**N**

Tab. 16 – Srovnání žáků PB - VOŠ a SŠ managementu

Jak z tabulky plyne, nikdo úlohu nevyřešil zcela samostatně. Nejlepších výsledků dosáhl Bernard, jenž pouze neznal vzorec pro diskriminant. Úlohu také vyřešil v nejrychlejším čase, což je ale ovlivněno i tím, že jsme nevedli rozhovor např. nad transformací, který byl často velmi náročný na čas. Celkově se časy jednotlivých žáků pohybovaly od 18 minut u nejrychlejšího, po necelých 44 minut u nejdéle řešícího.

Kromě Dušana se byli všichni schopni dostat s menší či větší pomocí k formulaci správné odpovědi. Dušan odpověď sice nakonec správně formuloval, ovšem z výsledků, které dostal k dispozici.

V následujících odstavcích se pokusím formulovat závěry ze školy v jednotlivých etapách, popřípadě možná doporučení pro práci. Vzhledem k vzorku pěti žáků nebudu uvádět hodnoty v procentech, což by mohlo být zavádějící, ale v absolutních hodnotách. Nelze generalizovat v tom smyslu, že pokud pro tento vzorek (byť s reprezentativním rozdělením známek) platí zjištěné skutečnosti, platí to pro všechny žáky ve škole.

Čtení

V této etapě neměl žádný žák problémy.

Porozumění

Dva žáci prošli touto etapou bez obtíží. Jeden s drobnou nápomocí a dva s velkou dopomocí. Velká část žáků se tedy nebyla schopna sama dostat přes porozumění úloze. Jelikož bez něj není možné úlohu dále řešit, je to zjištění minimálně alarmující. Pokud žák dělá chyby v jiných etapách než prvních dvou, má vždy možnost si chybu nalézt a opravit, v etapě porozumění se ovšem nedá o chybě mluvit a žáci ji tedy nemohou hledat.

Vzhledem ke zjištěné skutečnosti bych doporučoval věnovat se s žáky jednodušším slovním úlohám a kladení důrazu na rozbor celé situace, ideálně u každého žáka zvlášť.

Transformace

Etapou bez problémů jí prošel pouze jeden žák. Jeden měl obtíže lehčího charakteru, dva vážné a jeden nebyl schopen se dostat od slovního vyjádření k rovnici vůbec.

Možným způsobem, jak tento problém řešit, by bylo intenzivnější procvičování transformací, třeba i bez následného řešení rovnic. Například Krynický (2010) uvádí v učebnici řadu úloh transformaci slovního vyjádření do výrazů, a to od nejjednodušších až po složitější úlohy na toto téma.

Druhou možností, která by mohla vést ke zlepšení situace je pracovat s žáky na zpětné kontrole vytvořených rovnic. Určitě by bylo výhodnější začít s tréninkem na jednodušších slovních úlohách, než je tato. U jednodušších úloh si žáci mohou na konkrétních příkladech také lépe vyzkoušet, zda sestavená rovnice zachovává vztahy dané úlohou. Např. jestliže bude žák řešit úlohu, kde se vyskytují velká čísla, je možné mu poradit, aby si na menších číslech, kde může ihned spočítat výsledek, „otestoval" svoji sestavenou rovnici, především vztahy mezi čísly a neznámou.

Testování výše uvedených návrhů nebylo předmětem této práce, jedná se tedy o mé hypotézy, které by bylo nejprve nutné experimentálně ověřit.

PD – Vzorce

Vzorce nutné k řešení úlohy jsou vlastně dva. Pro diskriminant (resp. získání kořenů kvadratické rovnice pomocí něj) a pro obsah obdélníku. Oba neznal ani jediný žák ze všech pěti testovaných. To považuji za méně závažné. Pokud vím, že vzorec k řešení mého problému existuje a pouze ho neznám, lze ho vyhledat (v tomto je obtíž etapy porozumění, kterou takto není možné řešit). Někteří bohužel vzorec pro diskriminant neuměli správně použít, což se týkalo dvou žáků, kteří měli hodnocení této etapy C a jednoho, který měl D.

V jejich případě totiž vyhledání vzorce samotného není k ničemu. Otázkou také je, zda vzorec pro obsah obdélníku není spíše elementární znalostí, kterou by měl mít každý člověk místo toho, aby ji musel vždy vyhledávat. To ale není předmětem zkoumání této práce.

PD – Výrazy

Zcela bez problémů při práci s výrazy byl pouze jeden žák. Dva měli jen lehké obtíže. Jeden z nich při úpravě kvadratické rovnice do základního tvaru a druhý když potřeboval sčítat a odčítat výrazy. Jeden žák měl zásadní problémy při sčítání a násobení výrazů a jeden žák měl takové obtíže s prací s výrazy, že etapou neprošel vůbec.

Jelikož problémy s výrazy byly spíše lehčího charakteru, k jejich odstranění by mohlo u většiny žáků pomoci zadání většího množství příkladů na procvičování. Díky tomu by se měla práce s výrazy více upevnit. Dvěma žákům, kteří měli zásadní problémy při práci s výrazy, by asi pomohlo vysvětlení pojmu výraz a důkladná reedukace počítání s výrazy a úpravy rovnic.

PD – Znaménka

Touto etapou nebyl pro tři žáky problém projít bez obtíží. U jednoho nebylo možné sledovat, jak se znaménky pracuje, neboť se k žádné složitější úpravě s nimi nedostal. Jeden žák měl se znaménky lehčí problémy, ale po upozornění na chyby v řešení je dokázal samostatně nalézt a opravit.

Jelikož byly problémy se znaménky u žáků v podstatě zanedbatelné, není třeba věnovat této podetapě zvýšenou pozornost.

Dekódování

Celkem dva žáci neměli v této etapě žádné obtíže a zvládli formulovat správnou odpověď. Dva žáci měli lehčí obtíže při formulaci odpovědi. Jeden z nich se ke kořenům rovnice dostal samostatně a problémy při dekódování byly zanedbatelné. Druhý se nezvládl dostat ke kořenům kvadratické rovnice, nicméně ve chvíli, kdy je obdržel, dokázal z nich po kratším zaváhání, získat správnou odpověď na zadanou otázku.

Pouze jeden žák měl v této etapě vážné problémy, neboť by odpověď formuloval chybně číselně, ale také zcela změnil jednotku patřící k dané hodnotě.

Žákům s lehčími obtížemi by z mého pohledu pomohlo zdůraznění významu správné odpovědi. Nejsem přesvědčen, že byli plně soustředěni na formulaci, jelikož měli pocit, že úloha už je vlastně vyřešená. Nenapadlo je proto například si znovu přečíst zadání, aby byla odpověď precizně formulována. Na tuto možnost je vhodné upozornit.

Žákovi, který měl závažné obtíže v této etapě, by mohl pomoci hlubší rozbor získaných výsledků, samozřejmě provedený na více než jedné úloze.

4.2.2 Gymnázium Opatov

Stejně jako u předchozí školy jsou bližší informace v kapitole 4.4. Z gymnázia Opatov je do výzkumu zařazeno o jednoho žáka více. Jedná se o žáka nadaného na matematiku, který reprezentuje i naši republiku na matematických soutěžích a učitelé na dané škole chtěli, abych ho nechal úlohu vyřešit. Je ve výzkumu tedy zařazen, nicméně k němu přistupuji jako k výjimce, což vždy i zdůrazním.

4.2.2.1 Ferenc

Ferenc je žákem sexty osmiletého gymnázia. Matematika není jeho oblíbeným předmětem, ale ani to není tak, že by ji nesnášel. Ve třídě patří k podprůměrným žákům a v budoucnu plánuje studovat na VŠE. Z matematiky měl na posledním vysvědčení známku 4.

Popis

Nad úlohou strávil necelých 20 minut.

Jakmile přečetl úlohu, udělal správný náčrtek i s vyznačením cestiček. Vedle náčrtku si vypočítal celkový obsah záhonu. Po čtyřech minutách chtěl poradit, neboť nevěděl, jak pokračovat. Napověděl jsem mu, že by pomohlo označit si do náčrtu šířku cesty pomocí nějakého písmenka. Dále ode mě dostal radu, že by si mohl cestičku vytáhnout mimo náčrt a zkusit vyjádřit její obsah. Sestavil rovnici:

$$a \cdot 8{,}5 + a \cdot 6{,}9 = 6$$

Tuto rovnici následně vyřešil a chtěl označit výsledek za odpověď na úlohu. V tu chvíli jsem ho vrátil o něco zpět a zeptal se ho, jak by vypadala situace, kdyby cestičky vysypával štěrkem. Zjistil, že by místo kde se cesty kříží, vysypal dvakrát. Odhalil, že se jedná o čtverec se stranou a a zkusil odečíst na levé straně:

$$a \cdot 8{,}5 + a \cdot 6{,}9 = 6 - a^2$$

Když jsem ho požádal, aby mi vysvětlil tu rovnici po této úpravě, došli jsme k tomu, že by tam ten obsah čtverečku měl přičítat.

Poté již až ke kořenům kvadratické rovnice postupoval bez obtíží. Jakmile spočítal kořeny, odpověď formuloval takto: „Šířka první cestičky mi vyšla 15 a druhá 0,4.“

Docela dlouho dále váhal a nakonec zvolil odpověď 0,4 m, jelikož druhá (se šířkou 15 m by se tam dle jeho slov nevešla).

Analýza

Čtení

Etapou prošel bez problémů.

Porozumění

Načrtl situaci správně a evidentně i dle zodpovězených otázek zadání úlohy rozuměl.

Transformace

Ferenc sestavil lineární rovnici. Po upozornění na problematické místo, kde se kříží cestičky, si vyjádřil obsah čtverečku a ten doplnil do rovnice.

PD – Vzorce

Se vzorci neměl Ferenc vůbec problémy.

PD – Výrazy

Práce s výrazy byla bez obtíží.

PD – Znaménka

Ani v této etapě neudělal žádnou chybu.

Dekódování

Nejprve Ferenc sestavil odpověď chybně (neodpovídala zadání, neboť uvedl u každé cestičky různou šířku, nehledě na to, že ji uvedl bez jednotek). Po krátkém rozhovoru nad odpovědí si ji důkladněji rozmyslel a uvedl správnou.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Ferenc	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**A**	**B**

Tab. 17 - Ferenc

4.2.2.2 Gábina

Gábina je žákyní septimy osmiletého gymnázia. V matematice dosahuje nadprůměrných výsledků vzhledem k ostatním spolužákům. Dle vyjádření učitelky na matematiku je chápavá, má logické myšlení, ale často dělá chyby z nepozornosti. Po dokončení gymnázia by se ráda věnovala informatice na VŠ. Z matematiky měla na posledním vysvědčení dvojku.

Žákyně se úloze věnovala asi 15 minut.

Gábina nejprve načrtla situaci popsanou v úloze, poté sestavila lineární rovnici

$$8{,}5 \cdot x + 6{,}9 \cdot x = 6$$

Tuto rovnici vyřešila a zavolala mě s tím, že má již výsledek. Vysvětlila, jak dospěla k té lineární rovnici. Zkusil jsem se zeptat, zda kdyby sypala cestičky štěrkem, vyšlo by to také tak. Odhalila, že v rovnici chybí obsah čtverečku, kde se cestičky kříží. Po chvíli řekla, že se bude jednat o x^2, které v rovnici chybí.

Dále už Gábina řešila správnou kvadratickou rovnici a tu také pomocí diskriminantu řešila. Dospěla ke dvěma chybným výsledkům. Ty ovšem nebyly správné pouze kvůli předchozímu zaokrouhlení diskriminantu. Z nějakého důvodu je ještě použila při sestavení rovnice:

$$(x - 0{,}7)(x - 14{,}7) = 0$$

Na důvod sestavení jsem se jí neptal, pravděpodobně ale chtěla zkontrolovat, zda po roznásobení vyjde původní kvadratická rovnice. Po dosazení nezaokrouhleného diskriminantu byla asi trochu zmatená, neboť zapomněla ve vzorci na jmenovatele a uvedla tedy dvojnásobek kořenu. Sama ale přiznávala, že při kontrole jí to nevychází. Po upozornění kořeny opravila. Uvedla, že odpověď je: „Šířka cestičky je 0,4 m.“

Zeptal jsem se ještě na kořen 15 a odpověděla, že je to maximum šířky cestičky. Poté, co jsem se zeptal proč, uvedla, že je zvyklá při dvou výsledcích, že jeden je minimum a druhý maximum. Nakonec ale po kratší úvaze řekla, že by pak cestička byla širší, než záhon, což není možné.

Analýza

Čtení

Matematické pojmy evidentně nedělaly Gábině problémy.

Porozumění

Informace z úlohy převedla do náčrtu. Nejprve si ho udělala bez cestiček, ale poté přidala i ty a označila si šířku x.

Transformace

Stejně jako Ferenc sestavila Gábina rovnici lineární. Trochu delší dobu jí trvalo, než si po mých otázkách uvědomila, kde má chybu, ale pak ji sama opravila.

PD – Vzorce

Žádný vzorec problémem nebyl, pouze zaokrouhlení diskriminantu, nicméně v zadání nebylo, že se zaokrouhlovat nemá a v praktické situaci je to často nutné.

PD – Výrazy

Gábina s výrazy pracovala bezchybně.

PD – Znaménka

V této podetapě se při řešení nevyskytl žádný problém.

Dekódování

Po získání správných kořenů odpověděla správně, nicméně z mé další otázky bylo patrné, že zcela opominula diskuzi nad druhým výsledkem. Zabývala se jím, až když jsem se zeptal, co tedy označuje ten. Jakmile odpověděla, že je to maximum šířky cestičky, bylo jasné, že se nad ním předtím nezamyslela.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Gábina	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**A**	**B**

Tab. 18 - Gábina

4.2.2.3 Hubert

Jedná se o žáka sexty osmiletého gymnázia. Matematika je jeden z jeho spíše oblíbených (ne nejoblíbenější) předmětů. Po absolvování gymnázia by rád pokračoval na VŠ ekonomického směru, nebo se zaměřením na obchod. V pololetí měl z matematiky za 3.

Popis

Řešení úlohy se věnoval okolo 18 minut.

Během prvních tří minut si načrtl obrázek a vypsal hodnoty ze zadání. Poté mě zavolal s tím, že dále neví, jak pokračovat. Zeptal jsem se ho, zda by do náčrtu nemohl uvést i šířky těch cestiček a on si obě označil x. Pak řekl, že to je tedy x^2, proto přikládám ukázku z této pasáže řešení úlohy:

ČAS	EXPERIMENTÁTOR	ŽÁK	CO ŽÁK DĚLÁ	CO SE DĚJE
3:40	Tadyto no a dá se to nějak označit na tom obrázku? I když nevíme kolik to je?	Tak x a tady taky x.		
3:52	Přesně. Teď otázka, jestli vám to nějak pomohlo nebo ne.	No takže… to je x na druhou, když to…		
4:05	X krát x je skutečně x na druhou. Otázka je, co je to tady v tom konkrétním příkladu to x na druhou?	x na druhou je šířka těch cestiček?		
4:16	A vždyť vy jste si jí označil x, ne? Tu šířku cestiček? Takže x na druhou nebude šířka cestiček, ne?	Ale já potřebuju dvě.		
4:25	Potřebujeme dvě, to je pravda, na druhou stranu když už dvě, tak by to bylo dvě x, ale ani tak bych úplně neviděl jakej to má význam. To by byla dvakrát šířka cestiček, že? Zkusil byste si jen tak někam vytáhnout, jednu si vybrat z těch cestiček, jestli byste jí někam vykreslil ven z toho obrázku? Jenom tu cestičku.			
4:53		Tak, tady mám takovou… x, tohle je 8,5 metrů…	Kreslí obdélník a dopisuje k němu rozměry.	

Tab. 19 - Ukázka rozhovoru: Hubert

Poprosil jsem ho, aby si načrtl ještě vedle jen tu cestičku a určil její plochu. Na to se mě zeptal, co to je plocha, zda se jedná o Pythagorovu větu. Pak si nicméně uvědomil, oč se jedná a plochy obou cest si vyjádřil stranou jako:

$$8{,}5x \text{ a } 6{,}9x$$

Tyto výrazy následně sečetl a označil za celkovou plochu cestiček. Pak ji ale chtěl odečíst od celkové plochy záhonu, což udělal takto:

$$58{,}6 - 15{,}4 = 42{,}2$$

Upozornil jsem ho, že 15,4 má u sebe ještě x, tak se opravil, že to nelze odečíst. Poté řekl, že budeme muset použít vzorec, od čehož jsem ho odradil. Bohužel aniž bych zjistil, který vzorec chce vlastně použít. Následně jsem mu navrhnul rekapitulaci toho, co momentálně známe. Uvedl všechny skutečnosti a na závěr, že máme 15,4 m. Upozornil jsem ho na to, že tam opět neřekl x a chtěl jsem zjistit, jak chápe tento výraz. Nejsem ale z nahrávky schopen rozlišit, zda se mu to pouze pletlo nebo zda pojmu plocha/obsah příliš nerozumí. Je ale slyšet, že na mou otázku ohledně jednotek odpověděl, že jednotky u $15{,}4x$ jsou metry čtvereční.

Pak bohužel došla kazeta, kterou jsem zapomněl přetočit a musel jsem ji tedy vyměnit za jinou. Proto je v 8:50 málo znatelný střih, během něhož jsem mu sebral papír, než se mi podařilo vyměnit kazetu. Dále pokračuji s popisem řešení.

Po rekapitulaci a upozornění na plochu cestiček a zadání dospěl k rovnosti:

$$15{,}4x = 6$$

Řekl jsem mu, že něco tam ještě chybí a došel k tomu, že to upraví na tuto rovnici:

$$x^2 + 15{,}4x + 6 = 0$$

Toto udělal, jak vyplynulo z dalšího hovoru, zcela bez rozmyslu nad vztahy mezi jednotlivými výrazy. Upozornil jsem ho na to a přišel s tím, že někam musíme umístit mínus. Rovnici pak již s rozmyslem upravil takto:

$$-x^2 + 15{,}4x = 6$$

Dále řešil kvadratickou rovnici. Při tom špatně z kalkulačky opsal odmocninu z diskriminantu, na to jsem ho upozornil a opravil se. Poté mu ale vyšly oba výsledky -15. Chybu si našel, když jsem ho upozornil. Práce se znaménky se mu nedařila, zadával je do kalkulačky tak, jak měl vzorec pro kořeny napsaný, a kde vycházelo minus v čitateli i jmenovateli. Když jsem po něm chtěl, aby si to nejprve zjednodušil (tedy odstranil oba minusy), už se mu výpočet podařil bez problémů.

Při formulaci odpovědi chtěl uvést, že šířka jedné cestičky bude 0,4 m a druhé 15 m, hned jak to ale vyřkl, opravil se, že 15 m nebude možné (neboť je to více, než má záhon) a že tedy budou obě cestičky široké 0,4 m. Zde bylo obtížné rozhodnout, zda by měl dostat B nebo C, jelikož je možné, že by do odpovědi uvedl pro každou cestičku jinou velikost, což by zcela odporovalo zadání i logice sestavené rovnice. Nicméně tuto možnost nelze potvrdit ani vyvrátit, protože výsledná odpověď byla správná, proto jsem udělil stupeň B.

Analýza

Čtení

V této etapě jsem u Huberta nepozoroval obtíže.

Porozumění

Žák úloze rozuměl, jak vyplynulo i z otázek, které jsem mu pokládal. Náčrt si udělal správně a po upozornění do něj doplnil i neznámou.

Transformace

Sám se Hubert rovnici vůbec nepokusil sestavit. Bylo vidět, že je to pro něj velmi obtížný úkon. Nakonec jsme společně sestavili nejprve lineární rovnici a poté správnou kvadratickou. V té ale nejprve uvedl před všechny členy plus s tím, že kvadratický člen je roven nule. Naprosto zde zanedbal vazbu na zadání úlohy (nezohlednil, co se přičítá a co se odečítá).

PD – Vzorce

Vzorec pro diskriminant věděl zpaměti. Vzorce pro obsahy obdélníků také. Pak se ovšem ptal na to, zda se nejedná o Pythagorovu větu (jediné co bylo jasné je, že by chtěl úlohu napasovat na nějaký vzorec, ale neví vůbec jaký). V jiné chvíli určuje součet šířek cestiček jako obsah dvou obdélníků. Více z toho, co spadá do této podetapy, ale videonahrávka neukazuje.

PD – Výrazy

Problémy měl při práci s odčítáním čísla a výrazu, kde (opakovaně) pominul neznámou. (tzn. místo $15{,}4x$ používal jen $15{,}4$.)

PD – Znaménka

Když upravoval znaménka ve zlomku samostatně, nečinilo mu to problémy. Jelikož si ale zlomek, v němž měl minus v čitateli i jmenovateli, nijak neupravil, zadal ho do kalkulačky a „slepě“ převzal výsledek, uvádím to jako problém v této podetapě.

Dekódování

Odpověď v hlavě vytvořil chybně, ale jakmile ji řekl (a pravděpodobně by to stejným způsobem proběhlo i kdyby ji napsal), uvědomil si chybu a opravil ji na správnou. Proto jsem nesprávnou odpověď nehodnotil.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Hubert	**A**	**A**	**C**	**B**	**B**	**B**	**A**

Tab. 20 - Hubert

4.2.2.4 *Chrudoš*

Chodí do kvinty osmiletého gymnázia a v této třídě patří dle vyjádření učitelky na matematiku k lepším žákům. Zmínila nicméně, že má velké množství látky spíše naučené, než pochopené. Po gymnáziu by rád pokračoval na právnické fakultě VŠ. Z matematiky měl v pololetí trojku.

Popis

Úlohu řešil okolo 26 minut.

Po krátkém samostatném řešení se zeptal na vzorec pro obsah obdélníku. Snažil jsem se proto zjistit, jak rozumí pojmu obsahu. Bavili jsme se o vykachlíčkování stěny a po asi minutě přišel na to, že vzorec pro obsah obdélníku vlastně zná. Obraz na videonahrávce u tohoto žáka byl občas rozostřený, nicméně po chvíli bylo vidět, pokud mezitím napsal něco nového.

Náčrt si Chrudoš udělal tak, že cestičky byly vyjádřeny pouze jako úsečky, nikoliv obdélníky. Po dvou minutách spočítal obsah jednoho z cestičkami získaných obdélníků, pokud by všechny byly stejně velké. Když mi to vysvětloval, sám dospěl k tomu, že se ho na to úloha neptá. Zkusil poté spočítat plochu jedné cestičky. Předpokládal ale při tomto výpočtu, že obě jsou stejné (což nejsou). Rozebrali jsme situaci spolu a navedl jsem ho k označení neznámé do náčrtu.

Označil si šířky $š_1$ a $š_2$, a poté, co jsem se ho zeptal, zda se liší, už jen š. Poradil jsem mu, aby si cestičku ještě překreslil mimo náčrtek. Určil, že se jedná o obdélník a jeho délku nalezl v obrázku. Problém měl s určením (resp. označením) šířky. Nejprve prohlásil, že to bude 6 m^2, po mé kontrolní otázce, zda se opravdu jedná o šířku, se opravil. Bylo ještě třeba ho ale navést k tomu, že máme již někde šířku označenou jako š. Úlohu se snažil řešit spíše úvahou, do této chvíle pravděpodobně předpokládal, že vyjde nějaký pěkný výsledek, jak dokládá i následující ukázka hovoru:

ČAS	EXPERIMENTÁTOR	ŽÁK	CO ŽÁK DĚLÁ	CO SE DĚJE
14:37	O nich? V té úloze je to napsané….			
14:39		Že mají dohromady ty….obsah 6 metrů čtverečních…		
14:43	Tak, dohromady mají plochu 6 metrů čtverečních		Přemýšlí	
14:47		Takže já bych tady odhadnul 4 a 2?Tak podle toho obrázku.		

Tab. 21 - Ukázka rozhovoru: Chrudoš 1

Dále vytvořil tuto rovnici:

$$6{,}9š = 6$$

Tato fáze sestavování rovnice byla pro Chrudoše problematická, překvapivě ale poté, co sečetl obsahy obou cestiček, už pro něj nebylo problémem přidat na jednu stranu rovnice správně i obsah čtverečku, kde se obě cestičky protínají. Po vytvoření rovnice sestavil vzorec pro diskriminant a ten počítal, až do chvíle kdy zadal do kalkulačky všechny hodnoty. Jelikož tam špatně zadal znaménka, kalkulačka vyhodnotila, že odmocninu nelze spočítat (ze záporného čísla). Zjistil dva kořeny, které ovlivnila numerická chyba vzniklá při výpočtu:

$$15{,}4 + 14{,}6 = 31$$

Dále jsme diskutovali nad kořeny, které mu vyšly. Jako problém označil, že mu vyšly dva kořeny. Jak plyne z následující ukázky, předpokládal, že všechny kořeny musí být využity jako výsledky a že mu tedy vyšla jedna cestička 0,4 m a druhá 15 m. Ukázka:

ČAS	EXPERIMENTÁTOR	ŽÁK	CO ŽÁK DĚLÁ	CO SE DĚJE
22:20		No ale tady právě taky mi přijde jako …že kvadratická rovnice má…mě vyšly 2 kořeny, takže buď jsem někde udělal chybu, což je spíše pravděpodobnější….	Přemýšlí	
22:32	A proč myslíte, že jste někde udělal chybu? To by mě zajímalo….	Protože mi vyšly …. počítali jsme vlastně se stejnou šířkou a tedy mi nemůžou vyjít dva odlišné výsledky….		
22:43	Takže myslíte, že když dostanete úlohu, která bude řešitelná kvadratickou rovnicí, že nemůže mít 2 řešení?			
22:51		No samozřejmě že může ale….		
22:53	Někdy by mohla mít 2 řešení, že ano?			
23:00	Jo ne, pokud by to byla otázka….	No pokud by…zase byla…. ta otázka…. Jde o to, že by tady ta odpověď, která mi vyšla, se příčí v podstatě s tou otázkou, protože mě vyšly dvě odpovědi a tady je jaká šířka a ne jaké šířky že ne…Protože kdyby tam bylo…ty šířky….	Ukazuje na výsledky	

Tab. 22 - Ukázka rozhovoru: Chrudoš 2

Odpověděl nakonec takto:

ČAS	EXPERIMENTÁTOR	ŽÁK	CO ŽÁK DĚLÁ	CO SE DĚJE
25:03	Co si myslíte,že tou odpovědí tedy je?			
25:06		Takže já si myslím,že šířka tý cestičky bude 15 cm a 0,4 bude strana toho čtverce,ve kterém se to protíná?		

Tab. 23 - Ukázka rozhovoru: Chrudoš 3

Analýza

Čtení

V této etapě jsem nepozoroval obtíže.

Porozumění

Chrudoš si udělal náčrt, v němž si nevyznačil cestičky jako obdélníky (tedy s nějakou šířkou), ale jako úsečky. Dále začal v úloze počítat obsahy obdélníků, které nebyly v zadání, ani v otázce. Z toho jsem usoudil, že úloze zcela neporozuměl a to i když se potom prakticky sám opravil.

Transformace

Sestavení rovnice by u této úlohy rozhodně nezvládl samostatně. Zajímavé z tohoto pohledu je, že větší problémy mu dělala část lineární a kvadratický člen kvadratické rovnice doplnil bez obtíží.

PD – Vzorce

Vzorec pro diskriminant věděl zpaměti, problémy měl se vzorcem pro obsah obdélníku.

PD – Výrazy

S výrazy Chrudoš pracoval bez obtíží, pokud se jednalo o operace s nimi.

PD – Znaménka

Se znaménky při vlastních výpočtech problémy neměl. Neuměl je ovšem do kalkulačky správně zadat, popřípadě upravit si hodnoty tak, aby je do kalkulačky zadávat nemusel.

Dekódování

V této etapě měl vážné problémy. Především s očekáváním toho, že oba kořeny musí být při odpovědi využity. Při jednom pokusu o formulaci odpovědi uvedl výsledek v centimetrech, přestože po celou dobu prováděl výpočet v metrech.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Chrudoš	**A**	**B**	**C**	**B**	**A**	**B**	**C**

Tab. 24 - Chrudoš

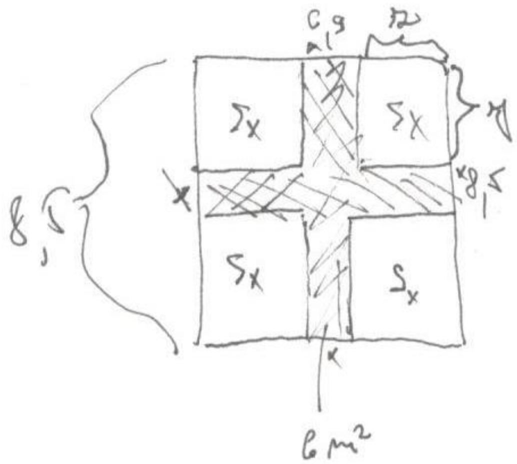
4.2.2.5 Igor

Je žákem oktávy osmiletého gymnázia. Nyní má tedy před maturitou a tu bude skládat i z matematiky. Je přijat na obor architektura na Stavební fakultě ČVUT. Jako jediný ze všech žáků řešil úlohu jiným způsobem (z mého pohledu složitějším). Na vysvědčení měl v pololetí z matematiky za 1.

Popis

Čas celkově strávený řešením byl asi 31 minut.

Nejprve si nakreslils náčrt, kde vyznačil všechny údaje. Rozdělil si celý záhon na čtyři stejné obdélníky a určil si celkem tři neznámé. Ukázka jeho náčrtku je zde:



Obr. 5 – Igor: Náčrt

Sestavil také tři rovnice o třech neznámých, které poté řešil. Používal správně dosazovací metodu, ale výslednou kvadratickou rovnici chybně upravil. Měl ji vynásobit čtyřmi, ale vynásobil ji pouze dvěma. Rovnice a jeho úprava vypadala takto:

$$\frac{8{,}5-x}{2}\cdot\frac{6{,}9-x}{2}=13{,}1625$$

$$(8{,}5-x)(6{,}9-x)=52{,}65$$

Pravdou je, že jsem si na první pohled nemohl všimnout jeho chyby a proto jsem ho na ni neupozornil. Logicky mi při rozboru sestavení tří rovnic o třech neznámých vše sedělo. Stejně tak při úpravě na jednu kvadratickou rovnici. Jelikož jsem chybu nemohl odhalit, přestože jsem věděl, že se někde nachází, navedl jsem ho na stejné řešení, jako prováděli všichni ostatní. Až po chvíli jsem si sedl a odhalil, kde Igor udělal chybu. To jsem s ním poté rozebral.

Dále při výpočtu diskriminantu udělal žák ještě numerickou chybu. To se mu za chvíli stalo ještě jednou. Jakmile dospěl ke kořenům kvadratické rovnice, správně vyloučil nevyhovující výsledek a zformuloval správnou odpověď na zadanou otázku.

S tímto žákem jsem velmi málo konverzoval, úlohu vyřešil správně téměř samostatně.

Analýza

Čtení

Žádné matematické pojmy v úloze obsažené nedělaly Igorovi potíže.

Porozumění

Bez problémů úloze porozuměl.

Transformace

Správně sestavil tři rovnice o třech neznámých.

PD – Vzorce

Vzorec pro diskriminant, vzorec pro obsah obdélníku i dosazovací metodu pro řešení více rovnic o více neznámých zvládl bez obtíží.

PD – Výrazy

Igor zaváhal při úpravě rovnice, kdy bylo třeba ji vynásobit čtyřmi a on ji vynásobil pouze dvěma.

PD – Znaménka

Neměl v této podetapě problémy.

Dekódování

Jakmile dospěl ke kořenům rovnice, ihned jeden vyloučil jako nemožný a do odpovědi správně použil pouze druhý.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Igor	**A**	**A**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**

Tab. 25 - Igor

4.2.2.6 Jonáš

Jonáš je žákem septimy osmiletého gymnázia. Tento žák je velmi nadaný na matematiku, logiku, informatiku a fyziku. Školu reprezentuje v několika soutěžích z těchto předmětů a v matematické olympiádě i Českou republiku. Vzhledem k tomu, že se jedná o takto výjimečného žáka, do tohoto výzkumu bych ho jako reprezentativní vzorek nezařadil.

Uvádím ho zde spíše pro zajímavost a v případě výsledků výzkumu budu vždy uvádět výsledky s ním i bez něj. Zajímavé ovšem může být srovnání řešení vzorku běžné populace (což by vzorek vybraných žáků měl splňovat) a Jonáše, který je v matematice zcela mimo úroveň středoškolských žáků. Z matematiky měl na vysvědčení jedničku.

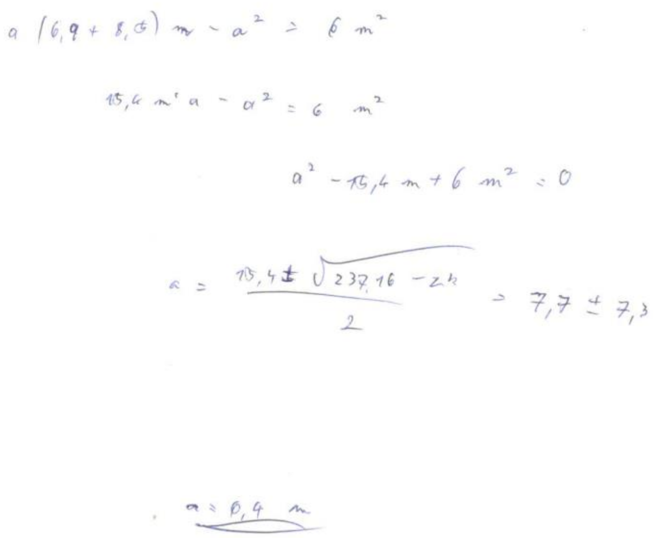
Popis

Nad úlohou strávil méně než 3 minuty.

Po asi 30 vteřinách od začátku natáčení začal Jonáš psát rovnici. Neudělal si žádný náčrt. Po řešení jsem se ho na to zeptal a prý nebyl potřeba, neboť to vše bylo celkem jednoduché. Rovnici sestavil takto:

$$a(6{,}9 + 8{,}5) - a^2 = 6$$

Z jeho řešení bylo jasné, že veškeré kroky k sestavení rovnice dělal pouze v hlavě, nikoliv na papíře. To se poté týkalo i samotného řešení. Vše, co si k tomu zapsal je v následující ukázce:



Obr. 6 – Jonáš: Celé řešení

Analýza

Jelikož Jonáš neměl problémy s průchodem ani jedné etapy, či podetapy, nejsou zde po jedné rozebrány.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování
Jonáš	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**

Tab. 26 - Jonáš

4.2.2.7 Shrnutí gymnázium Opatov

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování	Známka	Čas
Jonáš	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**1**	**02:02**
Igor	**A**	**A**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**1**	**31:47**
Ferenc	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**A**	**B**	**4**	**19:31**
Gábina	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**A**	**B**	**2**	**14:31**
Hubert	**A**	**A**	**C**	**B**	**B**	**B**	**A**	**3**	**18:42**
Chrudoš	**A**	**B**	**C**	**B**	**A**	**B**	**C**	**3**	**26:20**

Tab. 27 - Srovnání žáků gymnázia Opatov

Vzhledem k výjimečnosti Jonáše popsané výše nebudu brát při popisu v úvahu jeho výsledek, který by situaci v takto malém vzorku zbytečně zkresloval.

Jak plyne i z tabulky, samostatně a správně by úlohu nikdo nevyřešil. Velmi blízko k tomu ovšem byl Igor a je pravděpodobné, že při opakovaném zkoumání vlastního řešení, by odhalil chybu, kterou udělal (vynásobení jedné strany rovnice čtyřmi a druhé dvěma)

Pro zbylé žáky by odhalení chyby bylo pravděpodobně výrazně obtížnější, jelikož se jí dopustili v etapě transformace, kdy dva žáci shodně sestavili rovnici lineární, kterou velmi rychle vyřešili. Dva zbylí žáci se o sestavení rovnice samostatně nepokusili. Časy, ve kterých žáci úlohu vyřešili, se pohybovaly v rozmezí 14 až 32 minut.

Všichni žáci z gymnázia ale byli schopni někdy s větší, někdy s menší pomocí se ke správnému výsledku dospět. V dalších odstavcích je uveden popis jednotlivých etap, resp. podetap a to stejně, jako v kapitole 5.2.1.6 týkající se obchodní akademie.

Čtení

Etapou prošli všichni žáci bez jakýchkoliv obtíží.

Porozumění

Pouze jeden žák měl v této etapě obtíže, začal totiž počítat obsahy obdélníků, které v úloze nebyly ani požadovány. Začal vlastně nejdříve počítat a až poté řešil, co má za úkol. Ostatní žáci prošli etapou bez problémů. Jelikož byli žáci v této etapě takto úspěšní, nezvažoval bych opatření směřující k vylepšení daného stavu.

Transformace

Jeden žák neměl v této etapě problémy. Je zarážející, že ačkoliv předem věděli, že se jedná o slovní úlohu vedoucí na kvadratickou rovnici, dospěli dva žáci samostatně rovnici lineární. Tu po upozornění na protínání cestiček opravili na správnou kvadratickou. Zbylí dva žáci měli s transformací větší obtíže.

Stejně, jako v případě obchodní akademie by mohlo žákům pomoci procvičení sestavování výrazů na jednodušších úlohách, jaké jsou uvedeny například v (Krynický, 2010).

PD – Vzorce

Se vzorci neměli žáci gymnázia vážné problémy. Tři z nich prošli podetapou zcela bez zaváhání. Jeden byl u některých vzorců spíše zmatený, možná to bylo dáno jistou nervozitou a jeden žák si nemohl vybavit vzorec pro obsah. Dovedl ho ale sestavit poté, co jsem mu uvedl konkrétní příklad, kde může vzorec použít (kachličkování koupelny).

Jelikož problémy se vzorci byly u žáků gymnázia spíše lehké a týkaly se téměř výhradně vzorce pro obsah obdélníku, doporučoval bych častěji zařazovat tento a podobné vzorce do slovních úloh.

PD – Výrazy

Práci s výrazy zvládli bez obtíží dva žáci, zbylí tři potřebovali mírnou dopomoc. Jeden z nich měl menší problémy při násobení obou stran rovnice stejným číslem (aby odstranil zlomky na jedné straně). Druhý žák měl problémy vážnější, kdy opakovaně odečítal konstantu od koeficientu neznámé. Po upozornění na chybu v daném řádku ji ale vždy odstranil.

Vzhledem k téměř bezproblémové práci s výrazy bych zlepšování průchodu touto podetapou nevěnoval hlubší pozornost.

PD – Znaménka

Tři žáci prošli touto podetapou, aniž by se dopustili chyby. Oba zbývající žáci doplatili na nekorektní zadání do kalkulačky (jednalo se o zlomek, který měl v čitateli i jmenovateli minus). I při rozhovoru s oběma jsme společně dospěli k tomu, že kdyby si zlomek před zadáním do kalkulačky upravili, k chybě by nedošlo. Zde byl z mého pohledu prostor pro vysvětlení žákům, proč je často vhodné číselné výrazy nejprve upravit, než je zadáme do kalkulačky.

Dekódování

V této etapě uspěli bez problémů dva žáci. Dva měli lehčí problémy. Jeden z nich nejprve uvedl různé šířky cestiček a druhý automaticky první dosažený kořen, aniž by se zamyslel nad druhým. U obou by velmi pravděpodobně pomohlo přečtení zadání mezi získáním kořenů a formulací odpovědi.

Poslední žák měl s formulací odpovědi vážné obtíže. Jeho nesprávný předpoklad, že oba kořeny musí být při odpovědi využity, ho vedl k tomu, že nebyl schopen odpověď jakkoliv formulovat. To by totiž možná vedlo k zamyšlení nad tím, zda odpovídá realitě či ne. Tomuto žákovi by pravděpodobně opětovné přečtení zadání v tomto případě nepomohlo. Namísto toho by bylo lepší, aby si zkusil vyřešit několik jednodušších slovních úloh vedoucích na kvadratickou rovnici a to takových, kde hledáme například délku, a jeden kořen vyjde záporný. U takového kořenu je totiž na první pohled jasné, že nemůže být využit v odpovědi.

4.3 Diskuze

Výzkumu se zúčastnilo ze dvou škol dohromady 11 žáků, přičemž jeden z nich (Jonáš) jako výjimečně nadaný jedinec na matematiku, je tedy uveden spíše pro srovnání a není počítán do celkových hodnot, popřípadě při rozhodování hypotéz. Všechny uvedené závěry jsou nadále činěny pouze ve srovnání konkrétních dvou vzorků, nelze je považovat za obecně platné.

Žák	Čtení	Porozumění	Transformace	PD - Vzorce	PD - Výrazy	PD - Znaménka	Dekódování	Známka	Čas
Jonáš	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**1**	**02:02**
Bernard	**A**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**A**	**1**	**18:45**
Igor	**A**	**A**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**1**	**31:47**
Ferenc	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**A**	**B**	**4**	**19:31**
Gábina	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**A**	**B**	**2**	**14:31**
Cecil	**A**	**A**	**B**	**B**	**B**	**A**	**A**	**2**	**42:01**
Hubert	**A**	**A**	**C**	**B**	**B**	**B**	**A**	**3**	**18:42**
Chrudoš	**A**	**B**	**C**	**B**	**A**	**B**	**C**	**3**	**26:20**
Eda	**A**	**B**	**C**	**C**	**C**	**A**	**B**	**3**	**43:36**
Arnošt	**A**	**C**	**C**	**C**	**B**	**B**	**C**	**3**	**35:30**
Dušan	**A**	**C**	**D**	**D**	**D**	**N**	**B**	**4**	**N**

Tab. 28 - Srovnání žáků (žlutě žáci PB – VOŠ a SŠ Managementu, modře žáci gymnázia, šedě výjimečný žák)

V tabulce výše nalezneme celkové srovnání žáků. Jsou řazeni od nejlepšího k nejhoršímu a to podle nejhoršího stupně (tedy např. ti, kteří mají alespoň jeden stupeň C, jsou pod všemi, kteří mají nejhorší stupeň B). Dále potom dle četnosti nejhoršího dosaženého stupně a nakonec dle důležitosti obtíží při řešení.

Rozhodování při rovnosti nastalo u Bernarda a Igora, přičemž Bernard je uveden výše, jelikož měl problém pouze v neznalosti vzorce pro diskriminant. Pokud by si tento vzorec vyhledal (přičemž věděl, že ho nezná i jaký vzorec potřebuje a použít ho uměl bez obtíží), úlohu by bez problémů vyřešil. Namísto toho Igor udělal chybu při úpravě rovnice a na tuto chybu by samostatně asi nepřišel a úlohu správně nevyřešil. Měl problém si i po upozornění uvědomit, proč je jeho úprava chybná. Druhá sporná situace ohledně pořadí se týkala Gábiny a Ference, kde jsem opět rozhodl na základě subjektivního posouzení důležitosti chyby.

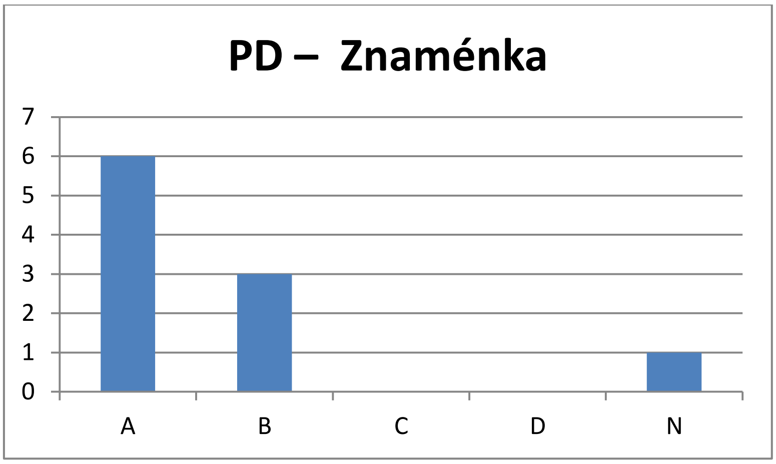
Z tabulky je zřejmé, že žáci gymnázia jsou na tom při řešení slovních úloh vedoucích na kvadratické rovnice lépe, než žáci obchodní akademie. Přesto není pravdou, že by všichni žáci gymnázia dopadli lépe, než všichni žáci obchodní akademie. Při vyloučení Jonáše ze srovnání dosáhl Bernard srovnatelného nebo možná lepšího výsledku, než všichni žáci gymnázia. Lépe, než tři žáci z gymnázia dopadl ještě Cecil. Naopak je zřejmé, že kromě Bernarda žáci obchodní akademie trávili nad úlohou obecně více času, než žáci gymnázia.

4.3.1 Srovnání jednotlivých etap

V této podkapitole uvedu postupně graficky znázorněné výsledky po jednotlivých etapách. I mnou definované podetapy jsou zde označovány jako etapy, jelikož jsou popsány stejným způsobem. Řazeny jsou tentokrát dle úspěšnosti žáků, nikoliv jako dosud podle posloupnosti při řešení. Je to proto, aby bylo názornější porovnání obtížnosti jednotlivých etap.

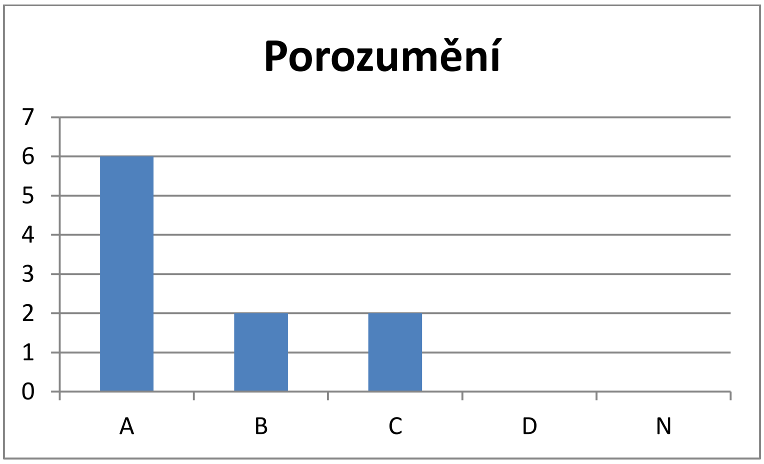
Z celkového srovnání je patrné, že etapa *Čtení* nečinila ani jedinému žáku problémy. To může být způsobeno více faktory. Jedním z nich je, že přesto, že v tomto výzkumu bylo v etapě požadováno o něco více, než žádá po řešiteli Newmanová, byla etapa pro žáky z České republiky příliš snadná. Druhým faktorem je, že přes zahrnutí porozumění matematickým pojmům v úloze do této etapy jich úloha samotná neobsahovala mnoho.

Etapa, která žákům činila malé nebo žádné obtíže, byla etapa *PD – Znaménka*. Z mého pohledu není třeba se na tuto etapu u sledovaných žáků zaměřovat, neboť jí procházejí téměř bez obtíží. Pouze u Dušana nebylo možné zaznamenat výsledek (což je blíže popsáno v jeho popisu). Graf znázorňující výsledky této etapy je níže:



Graf 1 – PD – Znaménka

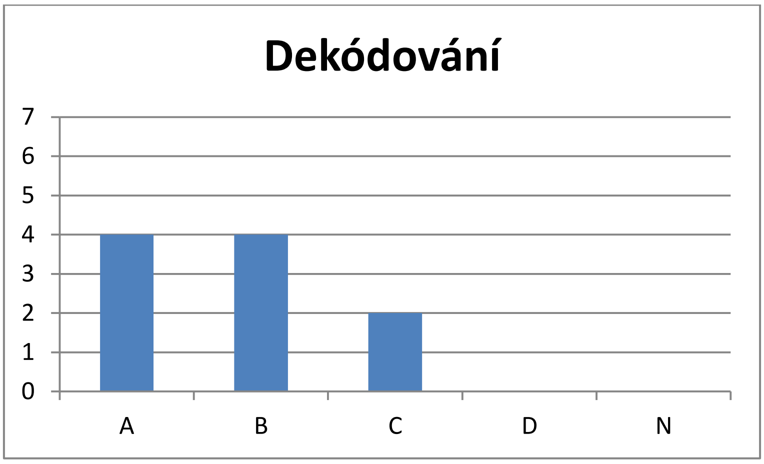
Porozumění je etapou, kde žáci dosahovali dobrých výsledků. Většina ze sledovaného vzorku neměla v této etapě obtíže a bez problémů jí prošla. Dva měli lehké problémy a dva měli problémy zásadnějšího charakteru, jak je i vyznačeno v následujícím grafu:



Graf 2 - Porozumění

Vzhledem k tomu, že žáci sami mohou tuto etapu jen těžko zlepšovat, je z mého pohledu vhodné i při relativně dobrém výsledku vzorku žáků, věnovat tréninku porozumění úloze dostatek času v hodině. Pomoci by mohly doplňující otázky po zadání úlohy, které se ptají žáka na porozumění („Rozuměl jsi úloze?“) popřípadě které přímo zkoumají, jak úloze rozuměl („O co se v úloze jedná a na co se tě ptá?“). Žáci by mohli zlepšit porozumění i díky vlastní tvorbě slovních úloh na zadanou rovnici. Spíše se to ovšem hodí pro úlohy řešené lineární rovnicí, popřípadě soustavou dvou lineárních rovnic.

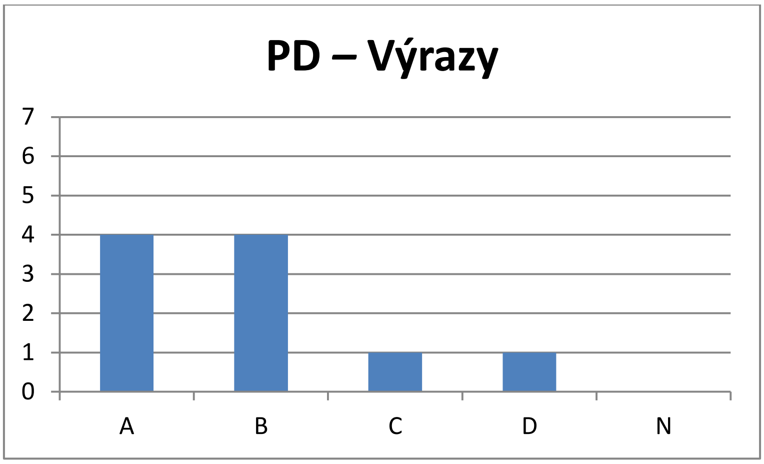
Poslední etapou, kterou všichni prošli alespoň na stupeň C, je *Dekódování*. Zcela správně zformulovat odpověď z výsledků bylo pro většinu žáků obtížné a zvládli to pouze čtyři, nicméně s lehčí pomocí se to podařilo dalším čtyřem a pouze dva měli s formulací odpovědi vážné problémy, jak ukazuje následující graf:



Graf 3 - Dekódování

Příčinou takového stavu může být to, že se žáci pravděpodobně příliš často nesetkávají s úlohami, kde z rovnice dostanou dva kořeny a oba kladné. Pokud by jeden z nich byl záporný, považuji za pravděpodobné, že ho žáci snáze vyloučí a uvedou do odpovědi pouze ten správný. Z vlastní zkušenosti se žáky mohu konstatovat, že obecně jim dělá problémy „přijmout“, že by úloha mohla mít i dvě řešení (což se u úloh vedoucích na kvadratické rovnice může stát) a vždy očekávají jeden výsledek z rovnice. Ve chvíli, kdy je tomu jinak, značně znejistí a to se možná projevilo na jejich odpovědích.

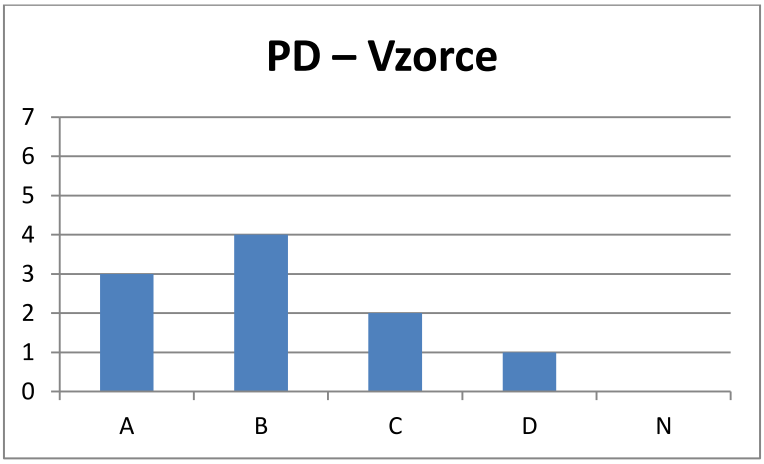
Další etapou dle úspěšnosti je *PD – Výrazy*. Zde bez obtíží uspěli 4 žáci a s lehkými obtížemi také čtyři žáci. Vždy jeden žák dosáhl hodnocení C, respektive D. Žáci, kteří v této etapě dosáhli hodnocení B, měli často jen opravdu drobný problém při řešení a je možné, že by podobnou chybu v úpravě výrazu či rovnice neudělali, pokud by řešili výraz nebo rovnici samostatně. Níže přiložený graf ukazuje rozložení hodnocení mezi žáky:



Graf 4 – PD – Výrazy

Výrazy a práce s nimi (včetně mnou zařazené úpravy rovnic) je asi jednou z nejvíce procvičovaných oblastní matematiky na středních školách. Práce s nimi se totiž objevuje při řešení úloh z mnoha matematických oblastí. Z tohoto pohledu se může jevit jako velmi překvapivé, že žáci nedosáhli lepších výsledků. Pravděpodobně je to z toho důvodu, že práce s výrazy, jakkoliv se začíná se žáky trénovat od druhého stupně ZŠ, zůstane pro značnou část z nich čistě abstraktní „akcí“, kterou provádějí mechanicky (tzn. bez porozumění situaci). Zlepšit by se to mohlo výraznějším tréninkem výrazů, např. jak navrhuje ve své učebnici Krynický (2010)

Druhou nejhorší etapou se stala etapa *PD – Vzorce*, kterou prošli bez obtíží pouze tři žáci a další tři měli menší obtíže. Dva měli obtíže závažnější a jeden etapou nebyl schopen projít. Znázornění je na následujícím grafu:

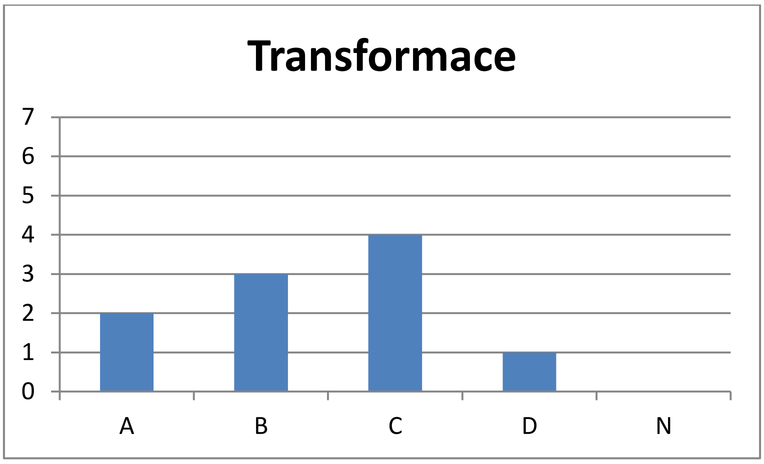


Graf 5 - PD – Vzorce

Vzorce, které je potřeba použít, jsou v úloze dva - pro obsah obdélníku (resp. čtverce) a pro diskriminant. Žáci, kteří dosáhli hodnocení B, alespoň jeden z nich neznali, nicméně je uměli použít a věděli, že daný vzorec potřebují. Nepovažuji tedy obecně u těchto žáků problém za zásadní. Žáci, kteří dostali hodnocení C, už jsou na tom o poznání hůře a nebyli schopni vzorec použít, to se stávalo především u vzorce pro diskriminant. Jeden žák měl s touto etapou nepřekonatelné problémy a nepodařilo se mu vůbec se vzorcem pro diskriminant pracovat.

U této etapy je třeba zmínit zásadní rozdíl mezi žáky z gymnázia a obchodní akademie. Zatímco nejhorší žáci gymnázia dosáhli hodnocení B, nejlepší žáci obchodní akademie dosáhli téhož hodnocení. Je to pravděpodobně způsobeno tím, že na gymnáziu žáci řeší daleko komplexnější úlohy, kde vzorce pravidelně procvičují. Naopak na obchodní akademii se učí spíše jednodušší úlohy specifičtěji zaměřené na dané téma.

Transformace dopadla mezi žáky nejhůře. Pouze dva žáci byli schopni sestavit rovnici bez pomoci a pouze tři to zvládli s menší dopomocí. Dokonce čtyři žáci potřebovali k sestavení rovnice výraznou pomoc a jeden rovnici nesestavil ani tak. Přehledně jsou výsledky vyjádřeny na následujícím grafu:



Graf 6 – Transformace

Transformaci ze své dosavadní zkušenosti i zkušeností jiných učitelů matematiky považuji za nejobtížnější z etap při řešení slovních úloh všech typů. Není tedy velkým překvapením, že i pro tento vzorek žáků tuto skutečnost výzkum potvrdil. Překvapivou je skutečnost, že tři z pěti žáků gymnázia sestavili rovnici lineární i přesto, že věděli dopředu, že by úloha měla být řešena pomocí rovnice kvadratické.

Dále je z mého pohledu překvapivé, že žáci gymnázia zde měli téměř shodné výsledky s žáky obchodní akademie. Žáci obchodní akademie dosáhli v součtu jen o dva stupně horší hodnocení této etapy, než žáci gymnázia. Ke zlepšení situace u jednotlivých žáků lze doporučit časté zařazování slovních úloh do různých oblastní matematiky. Z mého pohledu žáci obecně vcelku snadno řeší slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice, ale obtížněji jakékoliv jiné (např. vedoucí na rovnice kvadratické) a to pravděpodobně i proto, že se s nimi setkávají méně často.

4.3.2 Vyhodnocení hypotéz

Hlavní hypotézu považuji vzhledem ke vzorku žáků za ověřenou. Oproti dekódování je etapa transformace horší o 6 stupňů a vzhledem k řešení kvadratické rovnice (kde počítám s průměrem podetap procedurálních dovedností) je to přesně o 5 stupňů.

Vedlejší hypotézu [1] považuji za neplatnou. Žáci gymnázia dopadli vzhledem k žákům obchodní akademie v součtu pouze o dva stupně lépe, což je u takto malého vzorku příliš malý rozdíl na to, aby bylo možné hypotézu potvrdit.

Vedlejší hypotézu [2] považuji za platnou. Žáci gymnázia dosáhli ve dvou ze tří procedurálních dovedností lepších výsledků, konkrétně potom v *PD – Vzorce* o 7 stupňů, u *PD – Výrazy* o 5 stupňů a u *PD – Znaménka* nedosáhli lepšího výsledku, nicméně tam jeden žák obchodní akademie nebyl do srovnání uveden. Bez něj dosáhli žáci obou škol výsledků srovnatelných.

Vedlejší hypotézu [3] považuji za neplatnou. Jak plyne z celkové tabulky, dva žáci obchodní akademie dopadli ve srovnání lépe, než 3 resp. 5 žáků gymnázia.

4.3.3 Metodologické poznámky

Přes provedenou pilotní studii jsem pozoroval, že pokud bych srovnal první dva a poslední dva rozhovory z mé strany, vedení posledních dvou rozhovorů budu hodnotit lépe, neboť se mi z mého pohledu více dařilo klást otázky, které žákům méně prozrazovaly. Druhou změnou, kterou bych učinil, by byla příprava alternativní, lehčí úlohy, kterou bych mohl zadat těm žákům, kteří viditelně nezvládali řešit úlohu původní, byť se ve výzkumu jevil pouze jeden takový žák.

Další výzkum by si dle mého názoru zasloužila transformace této úlohy, a to kvantitativní (kolik procent žáků sestaví místo kvadratické rovnice lineární) a následně kvalitativní, který by pátral po příčině (pokud by se, jak předpokládám, potvrdilo, že se jedná o vysoký podíl žáků). Mě osobně to velmi zaujalo, neboť jak jsem již zmiňoval, žáci byli upozorněni na skutečnost, že slovní úloha se řeší pomocí kvadratické rovnice.

5 Závěr

Hlavním cílem této práce bylo zjistit, jak jsou žáci na vybraných středních školách schopni řešit slovní úlohy vedoucí na kvadratické rovnice, zachytit a popsat jejich problémy při řešení a navrhnout způsoby, jak tyto problémy odstraňovat. Tento cíl považuji za splněný. Za pomoci Newmanové metody jsem rozlišil, které části řešení takových úloh byly pro vybrané žáky nejobtížnější. Jak jsem očekával, nejhůře se žákům dařilo při sestavování rovnice (etapa transformace). Očekával jsem ale, že podobně špatně nebo jen o trochu lépe dopadne finální část řešení těchto slovních úloh, a to formulování odpovědi z výsledků. Tento můj předpoklad se nepotvrdil, protože žáci měli větší problémy s jinými částmi řešení, konkrétně při práci s výrazy a vzorci. Výzkum není vzhledem k malému vzorku možné generalizovat na všechny žáky obou škol, na nichž výzkum proběhl, natož na jiné typy škol. Přesto i vzhledem k podobným některým výsledkům žáků obou škol se zcela odlišným zaměřením a přístupem k matematice je možné alespoň předpokládat, že rozdíly mezi nejlépe hodnocenými a nejhůře hodnocenými částmi jsou relevantní.

Prvním vedlejším cílem mé práce bylo naučit se pracovat s metodou, která by mohla být užitečná i v jiných matematických oblastech. Toto použitá rozhovorová metoda Newmanové toto splňuje a poskytuje vcelku konkrétní informace o tom, kde má žák problémy a na kterou oblast je tedy vhodné se s ním zaměřit. Druhým vedlejším cílem bylo využít nahrávek k lepšímu vedení rozhovorů se žáky. Tento cíl považuji za splněný také a to především proto, že mezi první a posledními nahrávkami spatřuji výrazné rozdíly v mém dotazování a jakési opatrnosti při kladení otázek tak, abych žákům pomohl, a přesto jim nechal maximum prostoru k samostatné úvaze. Při prvních rozhovorech jsem jim velmi často řekl více informací, než nutně potřebovali k postupu, a to dokonce aniž bych si to uvědomil. K tomuto uvědomění u mě došlo až při zpětném zhlédnutí videonahrávek. Nemohu tvrdit, že by se mi to již v žádném ze závěrečných rozhovorů nestalo, ale rozhodně v daleko menší míře.

Kromě výzkumu je součástí práce i rešerše dostupných učebnic a jako obsahově nejlepší bych vzhledem k nejproblematičtější etapě transformace vyhodnotil učebnici (Krynický, 2010).

Seznam použitých informačních zdrojů

CALDA, Emil. *Matematika pro dvouleté a tříleté učební obory SOU, 2. díl*. dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-367-7.

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 1. díl*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-020-1.

CLEMENTS, Ken a Nerida ELLERTON. Newman analysis. Compass Learning Technologies [online]. Newcastle, 1996 [cit. 2016-04-13]. Dostupné z: http://www.compasstech.com.au/ARNOLD/PAGES/newman.htm

DIDIŞ, M., S. BAŞ, a A. ERBAŞ. *Students' reasoning in quadratic equations with one unknown*. Rzeszów, Poland, 2011. In Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Dostupné také z: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/3/CERME7_WG3_Gozde.pdf

GALLIEN, Virginie. Le poids de l'astronaute: Thème : Trinôme du second degré. In: Planète MATHS: Espace pédagogiques [online]. 2013, s. 1-9 [cit. 2016-03-01]. Dostupné z: http://www.ac-grenoble.fr/disciplines/maths/pages/PM/Ressources/411/fiche_prof_astronaute.pdf

HÉROLD, Jean-Francois. A Cognitive Analysis of Students' Activity: An Example in Mathematics. *The Australian Journal of Teacher Education* [online]. 2014, **39**(1), 23 [cit. 2016-03-28]. ISSN 1835-517X. Dostupné z: http://ro.ecu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=2297&context=ajte

CHARVÁT, Jura, ZHOUF, Jaroslav a BOČEK, Leo. *Matematika pro gymnázia. Rovnice a nerovnice*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008. 223 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-362-2.

CHROMÁ, Stanislava. *Strategie řešení slovních úloh řešitelných rovnicemi* [online]. 2011 [cit. 2016-03-22]. Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/78503. Vedoucí práce Jarmila Novotná.

KOLEKTIV UČITELŮ. Autour des fonctions. . In: Aix - Marseille - Accueil - Le Numérique éducatif [online]. Marseille, 2015 [cit. 2016-03-22]. Dostupné z: https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/upload/docs/application/pdf/2015-04/experimentation_fonctions.pdf

KRYNICKÝ, Martin. *Elektronické učebnice matematiky a fyziky* [online]. 2010 [cit. 2016-03-22]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/

ODVÁRKO, Oldřich, SKŘÍČEK, Ladislav a ŘEPOVÁ, Jana. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť. Část 2*. 6. vyd. Praha: SPN, 2006. 142 s. Učebnice pro střední školy.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

VOJTÍŠEK, Petr. *Výzkumné metody: Metody a techniky výzkumu a jejich aplikace v absolventských pracích vyšších odborných škol*. Praha: VOŠ sociálně právní, 2012. ISBN 978-80-905109-3-7.

ZAKARIA, Effandi. Analysis of Students' Error in Learning of Quadratic Equations. *International journal of Canadian studies* [online]. 2010, **3**(3), 6 [cit. 2016-04-05].

DOI: ies.v3n3p105. ISSN 1913-9039. Dostupné z:

http://www.ccsenet.org/journal/index.php/ies/article/view/5452/5297

Příloha

Přiložené DVD obsahuje:

- Všechna oskenovaná žákovská řešení úlohy
- Dvě natočená videa
- Všechny přepisy videonahrávek z hlavního výzkumu i pilotní studie (jeden je přímo přiložen jako ukázka níže)
- Text práce

ČAS	EXPERIMENTÁTOR	ŽÁK	CO ŽÁK DĚLÁ	CO SE DĚJE
0:00				Papír se zadáním leží na lavici
0:07	Jak jsem Vám říkal: „Když si nebudete vědět rady, tak nemá cenu, abyste nad tím seděl, ale řekněte mi.“			Papír leží stále na lavici a žák ho čte
0:13		Ehm	Kreslí obdélník	
0:26			Popisuje rozměry obdélníku.	
0:32		Já jsem to pokazil	Zjišťuje, že udělal chybu – popsal delší stranu menším rozměrem	
0:34	To nevadí, to se může stát.	To jo.	Popisuje i kratší stranu obdélníku (delším rozměrem)	
0:38 až 2:06	Rozhodně myslete na to, že skoro nikdo tohle nevyřeší sám a bezchybně. Tato úloha není tak jednoduchá.		Přemýšlí, čte si znovu zadání	
2:07 až 2:30			Zkouší nakreslit 2 svislé přímky (jako cesty) v obdélníku Čte zadání a zjišťuje, že udělal chybu.	
2:31		Můžu začít znovu?		
2:33	Začít znovu?	Ano.		
2:35	Klidně to škrtněte a začněte znova, to záleží na Vás.		Škrtá náčrt.	
2:38			žák kreslí vedle náčrt (obdélník) znovu, správně popisuje strany	
2:55	Já se znovu pro jistotu zeptám – je tam nějaká nejasnost, které jste nerozuměl?	No…		
3:02	Nebo máte pocit, že rozumíte tomu, co ta úloha říká?			
3:05		Jako asi…		
3:15		Asi nahoře to povede.		
3:18	Dobře.			

3:21			Črtá 2 cesty – rozděluje obdélník na 4 menší (spojuje poloměry protějších stran).	
3:13 až 4:06			Přemýšlí Črtá další obdélník, přemýšlí…	
4:30			Píše pod obrazce: „6 m^2=“	
4:58		No, už nevím.		
	Ukažte, já se podívám. Kdybyste mi přetlumočil, co se tam má zjistit…			
5:06		Maminka má záhon ve tvaru obdélníku se stranami 6,9 m a 8,5 m.		
	Takže to jste si naznačil tady.	Takže 8,5 bude ta delší strana a 6,9 bude ta postranní.		
5:18		…přeje si ho rozdělit pomocí 2 stejně širokých cestiček na 4.		
5:25	To znamená, že jste si to naznačil…	Jednu cestičku mám tady…	žák ukazuje, kde vyznačil cestičky	
5:32	Teď poslední věc – jaká je tam ta otázka? Já vím, že jí umíte přečíst, ale …	Jaká je šířka cestiček?		
	Hm… Jaká je šířka cestiček.			
5:51	Jenom tak se zeptám: Ty Vaše cestičky jsou tam vyjádřené jako…	Čárou.	Ukazuje přímky uvnitř obdélníku	
	Ano, čára, přímka, úsečka, … to je jedno, jak se na to budeme dívat. Má nějakou šířku?			
5:52		Zatím ne, ale… má mít.		
5:59	Má mít, že? Takže by bylo dobré, nevím, jestli by Vám to pomohlo zakreslit si tam ty cestičky jako cestičky – ne úsečky, ale cestičky.			
6:10			Kreslí „cestičky“ – zdvojuje úsečky uvnitř v obdélníku	
6:18	Co by se nám do toho obrázku ještě hodilo?			
6:23		Asi těch 6 m2?		
6:27	A kde je, kdybyste je měl ukázat těch 6 m2, kde se tam vyskytuje? Co to vlastně je?			Rozostřený obraz

		To je tady v těch cestičkách.	žák *(nejspíše)* ukazuje na rovnoběžky uvnitř obdélníku	
	Ano.			
6:35		Takže mám znát obsah?		
6:37	No, ono se nám to tam nebude úplně hodit. Můžete si to tam samozřejmě napsat, ale my tam máme zatím jen vzdálenosti. To by se nám to k tomu nehodilo. Ale otázkou je, jak se potom dostane z těch cestiček, kdybych býval znal tu jejich šířku, jak se z toho dostane těch 6 m?		Souhlasně přizvukuje	
6:57			je ticho, žák přemýšlí	
7:00		To nevím.		
	Nevíte vůbec?	Hm *(= ne)*		
7:05	Dobře, fajn je, když máme ten obrázek, tak si do něj naznačit i to, co potřebujeme spočítat. Tzn., že my tam vůbec nemáme tu šířku cestiček, kterou chceme spočítat těch cestiček. Dá se tam nějak naznačit do toho obrázku?			
7:26			Přemýšlí	
7:30		Asi jo.		
7:31	Když se tak ptám, že jo?			
7:33		No, dá.		
	Tak jí tam naznačte.			
7:37		Jako x-kem?		
	To je mi jedno, můžete to označit, jak chcete.			
7:47			Označuje u levé strany (b) obdélníku cestičku "x"	
7:52	Hm… Vyskytuje se tam ještě někde to x?			
8:00			Označuje u horní strany (c) obdélníku cestičku "x"	
		Tady ještě.		
8:04	No teďka, my víme o těch cestičkách co?	Že mají 6 metrů čtverečních		
8:08	Že mají 6 metrů čtverečních.	Ne, jo, jo jo		
8:16		Hm… takže (pauza) já budu potřebovat vypočítat všechno a pak těch 6 metrů čtverečních od toho odčíst?		
	Víme, že mají 6 metrů čtverečních	Jakoby…		
8:32	No můžete to minimálně zkusit, něco v tomhle smyslu. Uvidíte, kam se dostanete.			
8:40		No		
8:42	Já totiž nemám jasnou představu, co znamenalo to vaše: Musím spočítat všecko.	Jakoby spočítám, kolik má ten		

		obdélníček metrů čtverečních, obsah a pak…		
8:58	Zkuste…	A to je vzoreček…		
9:10	Já vám tady dám kalkulačku, tahle má odmocninu, tak se vám bude hodit spíš. Jenom kdybyste to potřeboval. Ono přecejenom ta desetinná čísla se vám asi nebude chtít počítat.	A jaký je vzoreček pro obsah? A krát b krát c?		
9:28	(úsměv)	Ne?		
9:31	Vidím, že jste trochu nejistej, co se týče obsahu.		píše S=	
9:40	Jaké má jednotky obsah?	a na druhou krát b na druhou?		
9:42	Jaké má jednotky obsah?	Me (pauza) try.		
9:50	No tam je to napsané, ne? Ty cesty mají nějaký obsah?	Metry… na druhou		
9:55	Takže je to metry na druhou. Metry na druhou, jo? To znamená, že když spolu násobíme, tak musíme násobit metr krát metr. Když je to metr na druhou.hn	hm		
10:10	Co spolu budeme násobit?	takže když si udělám a krát b krát c krát d.		
10:16	A kdybychom udělali a krát b krát c krát d? Tak nám vyjde? Metr krát metr krát metr krát metr neboli metr na? To by byl metr na čtvrtou. Což… asi ani neexistuje	Takže…		
10:35	Když chcete spočítat plochu pozemku, tak vezmete? Který má obdélníkový tvar? Tak vezmete jednu stranu… krát…	Druhou		
10:40	… stranu	Takže a na druhou krát b na druhou.		
10:47	Jednu stranu krát druhou stranu	a krát b		
10:50	a krát b.	To je obsah.	Dopisuje $S = a \cdot$a pod to konkrétní hodnoty a počítá výsledek na kalkulačce	
11:35		…metrů	Po dopsání 58,68	
11:38	A když je to plocha, tak bude v…	...metrech čtverečních.		
11:50		Teď mám celkovou plochu toho? I bez těch cestiček teda? Teda s těma cestičkama?		
11:57	teď máme plochu, kterou jsme měli původně. Původních těch záhonů	No tak teď bych prostě napsal těch -6 metrů čtverečních. To se rovná 52,65 metrů čtverečních	Zapisuje ty údaje	
12:24	A to je?	To je bez těch cestiček. Takže… Jaká je šířka cestiček. Takže teď to rozpočítám zase zpátky? Dá se to?		

		To je kravina		
12:45	Zkuste se zamyslet jak využít teďka ten obrázek, tu šířku těch cestiček, kterou tam mám, jak to využít k tomu abych jí zjistil. Jo protože tu šířku těch cestiček tam máte v tom obrázku. Tu tam máte nějak naznačenou.	ikskem no…		
13:01	Já vím, že x je nepříjemná záležitost, protože ho neznám.	takže…		
13:13	Když to xko neznám, tak… občas by to mohlo evokovat, že v rovnici by se mi objevilo jako… jako neznámá.	jako neznámá		
13:23	Tam nejdřív možná bude dobrý se podívat na to, jaký tvar má jedna cestička	ehm		
13:30	Jedna ta cestička.	Obdélník		
13:32	Obdélník. Dokázal byste ho vytáhnout někam stranou? Jenom někam mimo ten obrázek. Zkuste ji tam načrtnout někam stranou.	Tady?		
13:43	Kam chcete ji zkuste načrtnout, ale jestli by to šlo, tak mimo ten obrázek. Abychom ji měli někde stranou. Jednu z nich, to je jedno kterou.			
13:59	Má nějaké rozměry?	No ty nevim.		
14:05	Dobře, ale vím, že je tam někde?	Šířka x a dýlka bude 8,5	Črtá obdélník, kde označuje delší strany x	
14:18	Že jste si to zase označil vedle, ale to nevadí. Jedno xko škrtněte a tam si naznačte 8,5.		Škrtá x a označuje 8,5	
14:30	Kdyby po vás chtěl někdo obsah téhle cestičky. Jak bude vyjádřený ten obsah?	xkem		
14:37	Pomocí xka.	Takže… ehm… mám to psát takhle?	Píše $S = 8{,}5 \cdot x$	
14:50	Pište to, jak chcete.			
14:53	Nó a tohle je co? Jenom si to zopakujeme.	Rovnice.		
14:56	To není rovnice, nebo samozřejmě je to také rovnice, ale…	Co počítám?		
15:02	Spíš co to je. Ten obsah, co to je prakticky. Čím se to vyznačuje v praktické rovině?	To je obsah té cestičky.		
15:12	Takže plocha té cestičky. Bude nám k něčemu dobrá?	Určitě.		
15:15	Doufejme, že?	Abych spočítal tu šířku těch cestiček.		
15:24		Takže… no tak teď nevím.		
15:32	Tak tohle je jedna ta cestička. Máme tam ještě jednu, že?	Ale to bude vypadat stejně.		
15:37	Úplně stejně nebude vypadat.	tak já si jí tam udělám tu druhou.	Kreslí druhý obdélník	
15:55		A to bude teď…	Dopisuje strany a pak píše S=	
16:10	Kdyby vám docházel papír, tak já vám dám jiný.		Píše $S = 6{,}9 \cdot x$	
16:23	Tohleto je co?	Cestička. Plocha té druhé cestičky.		
16:26	Plocha té druhé cestičky.	A… nějakou rovnicí bych to asi měl.		
16:36	A teďka. Když máme. Co známe o těch cestičkách a o jejich ploše? Znovu si to tak nějak zopakujeme.	Že mají 6 metrů čtverečních dohromady.		
16:55	A my víme, že jedna z nich má jakou plochu?	8,5 a 6,9		

17:10	No ne 8,5 a 6,9 ale jedna má 8,5x, že jo?	No jasně		
17:20	A druhá má 6,9 krát x.			
17:24	A když je vezmu dohromady ty cestičky, tak mají plochu jakou?	Jo jasný. Takže…	Píše: $8{,}5 + 6{,}9 =$ Dopisuje = 15,4 a poté $S = 15{,}4 \cdot x^2$	
17:57	Není důvod být nervózní, není to test.			
18:40	Tak a jak jste došel k x na druhou?	Nemá tam být x na druhou?		
18:51	No mě by spíš zajímalo proč?	Protože tady z tý 8,5 krát x		
18:54	A můžu jenom… my většinou tam to krát ani nepíšeme, většinou píšeme jenom x. A kdybyste to x nahradil jen tak zběžně třeba slovem hruška a kdybyste měl 8x, takže 8 hrušek a 6 hrušek, bylo by to?	15 hrušek.		
19:23	A nebylo by to hrušek na druhou, že? Teď je ale otázka, jestli když se podíváme na ty cestičky opravdu ještě důkladněji, jestli tam nenastane nějaký problém. Jestli tohleto je opravdu ta plocha. Kdyby byla, tak se to rovná šesti, že?	hm (je slyšet, že se jedná o souhlas)		
19:45	Jo, to je to o čem jsme se bavili předtím, že známe tu celkovou plochu. Ale tam ještě nastává jeden drobnej problém, proč se to těm 6 přímo nerovná.	A to je?		
19:54	Hm no to je, ale otázka jestli vy to víte, co to je?	Ne.		
20:01	Vůbec?	Vůbec.		
20:05	Jak jsou ty cestičky položený?	No v tom obdélníčku. Na čtyři obdélníčky.		
20:14	Kdybych je měl jako koberec ty obdélníčky.	No		
20:15	Tak jak bych ho… nebo spíš než koberec, kdybych je třeba maloval barvou nějakou cestičku, nebo jí vysypával štěrkem. Potřeboval byste ten štěrk opravdu takhle ty dva obdélníčky?	Ne.		
20:31	**Proč ne?**	Protože…		
20:40	Představte si, že byste tam chodil po tom po tý cestičce, takhle mezi těma záhonama a vysypával byste ji štěrkem. Potřeboval byste opravdu toho štěrku tolik, že by se vysypávaly oba ty obdélníčky?	Jo		
20:53	Jo? To znamená, že by ten štěrk byl potřeba..	Jo.		
20:56	Jo?	tak asi ne, když říkat…		
20:58	No přecejen to je trošku cejtit v tom hlase, že? Tak se nad tím zamyslete, kdybyste tam opravdu nad tím stál. Zkuste si to představit, že jdete po té cestě a sypete ji štěrkem.	Takže jdu tady a sypu jí štěrkem	Ukazuje při tom na obdélník.	
21:15	Takže je celá zabarvená štěrkem. Tak si ji zabarvěte třeba.		Vybarvuje obdélníček.	
20:22	Hm. A teď co ta druhá?	Ta je tady bez toho kousíčku. Jó.		
21:30	No bez toho kousíčku.	A jó, takže budu potřebovat o ten kousíček míň. Nebo kdybych to měl, jak to počítal, tak mi přibyde. Kvůli tomu		

		kousíšku.		
21:43	Tak vám přibyde, přesně tak.	A ten kousíček…		
21:50	A ten kousíček… co to je za objekt vůbec? Kruh nebo krychle?	To je čtverec.		
22:01	To je čtverec. Můžete si ho tam někam vytáhnout? Ono obecně, když máme nějaký objekt, je dobré si ho někam stranou vytáhnout, aby to bylo patrné.	Ehm		
22:12	Má rozměry?	Asi ne.		
22:18	Nemá rozměry?	Nemá… nebo má?		
22:21	Jakože vůbec nemá? To by tam nebyl, ne?	Jakože asi má, ale… to nevim jaký ale (pauza). Bude mít těch… Jo jasně, on má těch 6,9 a 8,5… ne to je vlastně celková.		
22:44	Ne to nemá.	Takže… nemá těch 15?		
22:58	Zkuste místo hádání se podívat na ten obrázek. Tam je to dokonce nakreslený, kolik má ty rozměry.	Jako fakt?		
23:00	Hm (souhlas)			
23:10	V tom nahoře, tady (ukazuje na náčrt). Kde nám ten čtvereček vzniká?	Tady.	Ukazuje na křížení cest.	
23:15	No a máme tam nějaký z těch rozměrů danej?	No… x?		
23:22	No on má takhle tuhletu stranu x a tuhletu?	6,9…		
23:30	Tuhletu? (ukazuje na šířku x) Tuhletu má? Vzhledem k tomu že to je čtverec mimochodem…	Taky x.		
23:36	Taky x.	Takže…	Dopisuje ke čtverci rozměry stran x a x.	
23:45		Tak…teď… To budu potřebovat obsah toho.		
24:09	No	Jak to spočítám, když tam jsou xka?		
24:11	Jak spočítáte obsah, kdybyste to znal? Kdybyste věděl, že je to 5 třeba. Jak by vypadal obsah?	a na druhou krát b na druhou?		
24:31	Tak jsme zase u toho obsahu, že? My už jsme dnes obsah jednou řešili…	a krát b?		
24:35	A tady v tom případě?	To je x krát x.		
24:40	No, což je?	x na druhou.		
24:43	Tady je to vaše x na druhou. (pauza). Tak to máme obsah všech objektů, co nás zajímaj a teď ještě kdybyste z toho uměl spočítat, kolik to x je?	Takže… S se rovná?		
25:07	To je na vás, jak si to označíte. Popravdě mi o to značení vůbec nejde. Spíš o.. Jestli víte…	Tady jsem spočítal to bez těch cestiček. To budu potřebovat teďkon? … asi jo, co?		
25:21	Ono je to opravdu… já bych vám do toho nerad mluvil v tomhle smyslu, co budete nebo nebudete potřebovat. Ono to totiž není ani jednoznačné.	Padesát osm	Píše $S = 858{,}65 \cdot 15{,}4 = x^2$	
26:04	A můžete mi vysvětlit, proč je spolu násobíte ty dvě hodnoty?	Měl bych je dělit?		
26:11	Nejdřív by bylo fajn si uvědomit, co to je. Co je to první?	První je obsah		

		celýho toho bez cestiček.		
26:16	Bez cestiček. Tak dobrý a násobíte ho?	Násobim ho těma cestičkama.		
26:26	A to dává? Logicky smysl jaký?	To dává…		
26:29	Násobíme spolu dva obsahy…	Dělit bych to měl! Nebo minus?		
26:33	Co dostaneme, když spolu budeme dělit dva obsahy? Co vy vlastně děláte? Tady opravdu se bavíme o úplně reálný situaci. To si přece umíte představit, že máte nějaký pozemek a dělíte ho na cestičky.	No.		
26:45	Tak co budete dělat s těma plochama?			
26:51	Když má maminka záhon. Tak má normálně svůj velkej záhon, někdo jí tam udělá cestičky, tak co se jí tam stane s tou plochou?	Zmenší se jí.		
27:01	Zmenší se jí no. A vy jste to tam dokonce už vyjádřil to jakým znamínkem, čím se to tam vlastně dělá. Protože když přišla o těch 6 metrů, tak vy jste to tam správně tam jako interpretoval. Vy jste vzal celkovou plochu a těch šest metrů jste od toho…	oddělil		
27:19	No oddělil znamená odečetl.	odečetl. Takže teď budu pracovat tady s tím číslem.	Ukazuje na celkový obsah od nějž je odečteno 6 m^2	
27:22	Což to s jakým číslem budete pracovat, nechám na vás, ale to, ale ty obsahy se od sebe prostě odečítají v tadytu chvíli.	Takže tady mám tadyto. Když si napíšu 52,6 minus 15,4.		
27:55	Víte co? Než budete takhle hádat, co budete sčítat nebo odčítat, tak si nejdřív ještě znova, možná si to tam i nějakým způsobem poznačte, co jsme to vlastně spočítali, jo? Takže máme támhle dole ty dva malý obdélníčky a těch 15,4 to je co?	To je… dohromady tenhle…strany… to ještě není ten obsah!		
28:26	To právě je obsah.	To už je?		
28.28	To je obsah čeho?	Obsah těch cestiček.		
28:30	Obsah těch cestiček. Tak, proč jsme počítali to x na druhou někde? To byl obsah čeho?	To byl obsah těch cestiček.		
28:40	No to nebyl obsah cestiček. To x na druhou byl obsah? Kde se ty cestičky překrývaj.	Hm		
28:52	Tady je asi dobrý si uvědomit, že když vezmeme tenhle obdélníček (ukazuje na náčrt jedné cesty) a tenhle obdélníček (druhá cesta) a prostě bychom je sečetli, tak nedostaneme těch šest metrů čtverečních. Proč?	Protože tam je… jakoby…		
28:58	Jakkoliv to řekněte, proč nedostaneme, kdybychom sečetli obsahy tady těch dvou, budeme předpokládat, že bychom je znali, sečetli bychom je, tak bychom nedostali těch 6 metrů čtverečních. Proč?	Prostě je to větší.		
29:21	A proč je to větší? (pauza) No vždyť to je dobře, že je to větší…větší to je.	Ty strany…		
29:28	Ne, je to právě kvůli tady tomu (ukazuje na čtverec se stranou x) čtverečku. Protože ten my tam počítáme někde dvakrát.	Jo jasně.		
29:34	Protože my kdybychom to vysypávali tím štěrkem, tak tady budeme sypat, sypat, sypat, tak tuhle vysypeme celou, ale tuhletu potom přeskočíme ten čtverec, který	ehm (souhlas)		

	už jsme dělali, že jo.			
29:46	Teď mi ale řekněte. Jinak víme, že kdybychom sečetli ty cestičky, tak by nám to dávalo těch šest, že jo?	ehm (souhlas)		
29:54	Takže z toho bychom už měli nějak sestavit rovnici, ale tak, aby nám skutečně dávala rovnost, takže bacha na ten čtvereček. Jestli by se vám podařilo sestavit tu rovnici, pomocí které by to potom šlo vyřešit.	To fakt nevim.		
30:35	Zkuste se dívat na ty obrázky, třeba vám pomůžou ty obrázky. Máte jich tam teda víc, to uznávám…		Píše $52{,}65 -$ $15{,}4 =$	
31:12	Bacha, to 15,4 bude určitě nutný neoddělovat od toho x.		Píše za 15,4 x na druhou	
31:15	Ne x na druhou, tam je x jenom.	Jo a jo vlastně, jsem ho škrtnul	Píše $52{,}65 - 15{,}4x$	
31:28	Teď jenom se podíváme, co jste to tady napsal. Tohleto je plocha bez cestiček, jo? (ukazuje na 52,65) a odečítáme od toho co?	To jsou ty cestičky.		
31:40	Odečítáme od toho další plochu cestiček. Co nám to dá? (pauza) To je jako kdybyste tam ty cestičky dělal ještě jednou.			
31:50	Ještě jednou zopakuju, tohle je plocha bez cestiček..	Tak neměl bych těch 15,4 minus těch šest metrů čtverečních?		
32:05	Já bych ještě zkusil… nebojte se… ještě chvilku vás budu trápit. Podíváme se na tohle (ukazuje na obdélník) plocha jedné cestičky. Tohle (ukazuje na druhý) plocha druhé cestičky.	Hm (souhlas) … já bych (není rozumět, ale zřejmě chce popsat si co je první a co je druhá)	Popisuje si první cestu jako jedna a druhou jako dva	
32:19	Jasně, klidně. Popište si to jak potřebujete.			
32:23	Plocha druhé cestičky. Tohleto?	To je ten čtvereček.		
32:31	Kterej nám tam jakoby vzniká dvakrát, to znamená, že ten je tady schovanej někde navíc, jo?	Hm		
32:39	A my víme, že dohromady ty cestičky mají kolik?	15,4x		
32:47	x no. Ale taky víme, protože to nám maminka říká, nebo kdo si to tam pamatuje, pamatuje si to ten jeji syn. Tak on si pamatuje co?	Že maminka přijde o 6 metrů záhonu.		
33.02	Takže my víme, že tohleto dohromady je 15,4x	A přijde o těch šest.		
33:05	Ale zároveň taky to musí bejt? (pauza) No ona přijde, jo plocha cestiček je 15,4x, zároveň tam hraje roli tenhleten čtvereček, ale ona přijde o 6 metrů čtverečních.	hm		
33:24	Co musí platit o tady tom a o těch šesti metrech čtverečních?	Ž e si to…		
33:32	To musí být totéž. To v tom nevidíte?	Vůbec.		
33:43	Ona pokud přijde o 6 metrů čtverečních, tak tady jí vysype nějakou plochu, tady jí vysype nějakou plochu (ukazuje do obrázku) Dohromady musí dát 6 metrů čtverečních, protože o ty ona přijde v tom záhonu. A to už se dá napsat jako rovnice. Vidím, že koukáte překvapeně, že to nejde napsat jako rovnice?	To nejde.		
34:05	Já jí zkusim napsat v tom případě a zkusíme pak			Exp.

	interpretovat, co to znamená. Jestli se k tomu dokážete dostat.			píše správnou rovnici a při tom říká, co píše.
34:21	Takhle je ta rovnice správně tak, jak by bylo fajn, kdybyste se k tomu dostal, ale to nevadí. Teď mi řekněte, jestli chápete, co jsem to v té rovnici napsal?	Ne.		
34:35	Na jedné straně máme co?	Šestku, to je ten…		
34:41	To je to, o co ona přijde, přesně tak. Neboli ty cesty.			
34:45	Tady máme co? (ukazuje na 15,4x)	To je plocha cest		
34:53	Plocha cest dohromady a proč jsem od toho odečítal to x na druhou, kdybyste mi ještě vysvětlil?	Protože to… to jsou ty ty… to je ta ten čtvereček		
35:10	A já bych ho tam počítal, kdybych to prostě sečetl…dvakrát	Dvakrát.		
35:15	Dvakrát, přesně tak. Já kdybych to tady překreslil, ty cestičky jenom. Tak tady mám šířku x, tady mám šířku x a já bych sypal ten čtvereček po prvý, sypal ten čtvereček po druhý, tak bych ho tam počítal po druhý, takže já ho tady odečítám, aby mi to skutečně dalo těch 6.			
35:56	Já bych ještě chtěl zkusit, jestli umíte tuhle rovnici vyřešit.		Odečítá od obou stran 6 a zapisuje pod to rovnici v základním tvaru	
36:34			Odečítá od 15,4x šestku a zbývá mu 9,4x	
36:38	Hm, pamatujete si, jak se řeší, taková kvadratická rovnice?	Moc ne.		
35:43	Moc ne? To koukám.	Hm		
36:47	Většinou se nejdřív převede všechno na jednu stranu. Protože se to řeší pomocí toho vzorce pro diskriminant. Říká vám to něco?			
36:59	Moc ne, co? (pauza) A už jste to někdy viděl, když to napíšu tady?			Exp. píše vzorec pro diskriminant.
37:01	No já jsem to napsal docela šikmo, jestli už jste to někdy viděl takhle.	hm		
37:20	viděl, že jo? A věděl byste jak to použít?	hm (nesouhlasné)		
37:25	Dobře. Tak já už bych vás nerad jako trápil víc, ale jednu věc bych přecejenom rád věděl. Na konci vám vyjde x jedna se rovná 15, x dva se rovná 0,4, jo? Tyhlety dva výsledky, na konci byste se k tomu dostal, kdybyste to uměl vyřešit. Já bych jenom chtěl, tyhlety dva výsledky, kdybyste mi uměl vysvětlit, jaký bude řešení tý úlohy. Jestli byste se zamyslel nad tím. Vyjde vám x jedna se	Tak 15 bude ta šířka cestiček.		

	rovná 15, x dva se rovná 0,4. Co byste s tím jako dál dělal?			
38:20	15 bude šířka cestiček? 15 čeho?	Ne ta bude 15 metrů.		
38:25	15 metrů?	Ne to je kravina.		
38:27	Proč?	To je moc.		
38:31	Je to trochu moc, tam se jako…	Takže 0,4… nebude to ten, to co nám jakoby zbyde?		
38:47	Já jsem vám tu rovnici dal, takže budeme předpokládat, že je sestavená správně. Ale mě jde spíš o to, jestli byste dokázal říct tu správnou odpověď z těhle výsledků. Jestli byste dokázal, řekněme splácat tu správnou odpověď. To znamená odpovědět na to, jaká bude šířka cestiček.	Šířka cestiček bude…		
39:15	No, šířka cestiček bude? Začíná to správně.	0,4 metru? Ale to je málo?		
39:17	To je málo?	No mě to tak přijde.		
39:26	Kolik to je?	40 centimetrů,		
39:31	No na chození mezi záhony…	By to šlo?		
39:33	By to asi šlo, ne? Otázka je co s tou 15tkou. Ta tam teda nebude vůbec?	Asi ne.		
39:40	Asi ne. To se nám u kvadratické rovnice právě stává, že nám tam vyjdou dva výsledky, z nichž jeden nedává smysl.	Jasný, takže jeden škrtnu?		
39:50	No mě šlo jen o tu odpověď, jestli byste se k tomu dokázal dostat. Tak vám děkuju. Bylo to těžký?			